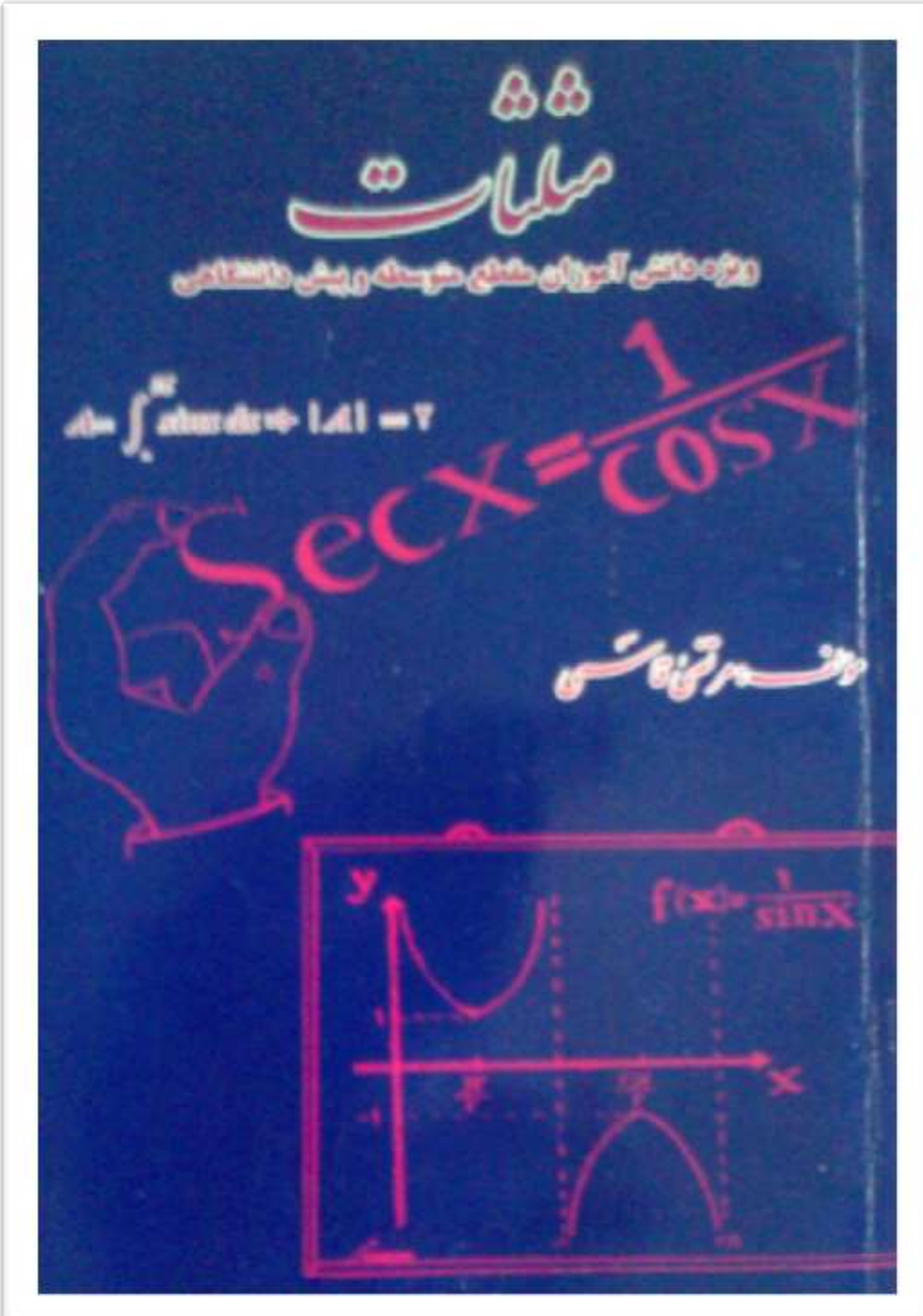

مثلثات
ویژه دانش آموزان مقطع متوسطه و پیش دانشگاهی
$\sec x=\frac{1}{\cos x}$
$f(x)=\frac{1}{\sin x}$
y
x

به نام خدا

مثلثات

مؤلف: «مرتضی قاسمی»

E-mail:morteza45ghasemi72@gmail.com

۱۳۸۳

انتشارات کرمانشاه

انتشارات کرمانشاه

❀ نام کتاب : مثلثات

❀ مؤلف : مرتضی قاسمی

❀ ناشر : هرمز بیگلری

❀ حروف چینی : واحد کامپیوتر انتشارات کرمانشاه

❀ صفحه‌آرا و حروف نگار : اشرف ملکی

❀ طرح روی جلد : بهاره حسینی

❀ چاپخانه : نهضت

❀ تیراژ : ۲۰۰۰ جلد

❀ قطع کتاب : وزیری ۷۲ ص

❀ قیمت : ۷۰۰ تومان

❀ چاپ : اول - ۱۳۸۳

❀ شماره شابک : ۶ - ۶۹ - ۶۶۰۳ - ۹۶۴ ISBN:964-6603-69-6

انتشارات کرمانشاه- چهار راه مدرس : پارکینگ شهرداری مقابل هتل راه کربلا - تلفن ۷۲۲۲۹۳۲

قاسمی ، مرتضی ، ۱۳۴۵ -

مثلثات / مؤلف : مرتضی قاسمی . - کرمانشاه : انتشارات کرمانشاه، ۱۳۸۳.

۷۲ ص. : جدول.

ISBN 964-6603-69-6

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.

۱. مثلثات - راهنمای آموزشی (متوسطه). ۲. مثلثات - مسائل، تمرین‌ها و غیره.

الف. عنوان.

۵۱۶/۲۴۰۷۶

QA ۵۳۱ / ق ۲ م ۲ ۱۳۸۳

به نام خدا

من نمی‌دانم که چرا می‌گویند: اسب حیوان نجیبی است، کبوتر زیباست

و چرا در قفس هیچ کسی کرکس نیست .

گل شبدر چه کم از لاله‌ی قرمز دارد.

چشم‌ها را باید شست، جور دیگر باید دید ...((*سهراب*))

هدف از تألیف این کتاب آشنا نمودن دانش‌آموزان با علم مثلثات از سطح مبتدی تا پیش دانشگاهی است. از آنجا که در کتاب‌های دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی بصورت پراکنده و کم‌رنگ به معرفی مثلثات و توابع مثلثاتی پرداخته شده است مطالعه‌ی کتاب مذکور که حاوی مثال‌های متنوع ، نکات کنکوری و تمرین برای دانش‌آموز می‌باشد به همهٔ دانش‌آموزان توصیه می‌شود.

ضمناً از اثبات قضایا و روابطی که اثبات آنها در کتاب‌های درسی موجود است خودداری شده است.

مرتضی قاسمی

مثلثات: شاخه‌ای از علم ریاضیات است که دربارهٔ رابطه‌ی بین اضلاع و زوایای مثلث بحث می‌کند.

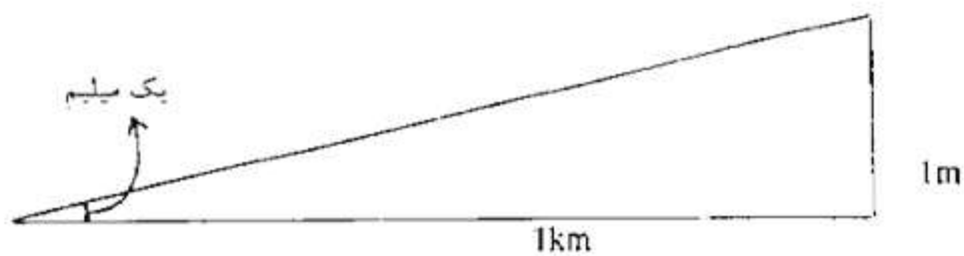
۱ - واحدهای زاویه :

I) درجه : $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره را یک درجه تعریف کرده و با D نشان می‌دهیم

II) گراد : $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط دایره را یک گراد تعریف کرده و با G نشان می‌دهیم

III) رادیان : طول کمانی از دایره که برابر شعاع همان دایره باشد یک رادیان گوئیم(محیط دایره برابر ۲π رادیان است

IV) میلیم : زاویهٔ رویت یک شی یک متری در فاصلهٔ یک کیلومتری را یک میلیم تعریف کرده و با m نشان می‌دهیم ($\frac{۱}{۶۴۰۰}$ محیط دایره)



۲ - تبدیل واحدهای زاویه به یکدیگر

برای این منظور از دستور مقابل استفاده می‌کنیم

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R}{۲\pi}=\frac{m}{۶۴۰۰}$$

یا $$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}=\frac{m}{۳۲۰۰}$$

مثال ۱ : ۲۷° چندگراد و چند رادیان است.

گراد $۳۰=\frac{۲۷\times۲۰۰}{۱۸۰}=\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Rightarrow\frac{۲۷^\circ}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Rightarrow G$ داریم

رادیان $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۲۷^\circ}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۲۷\pi}{۱۸۰}=\frac{۳\pi}{۲۰}$ داریم

تذکر : واحدهای کوچکتر درجه دقیقه و ثانیه می‌باشد که هر یک درجه برابر ۶۰ دقیقه و هر

دقیقه نیز ۶۰ ثانیه می‌باشد.

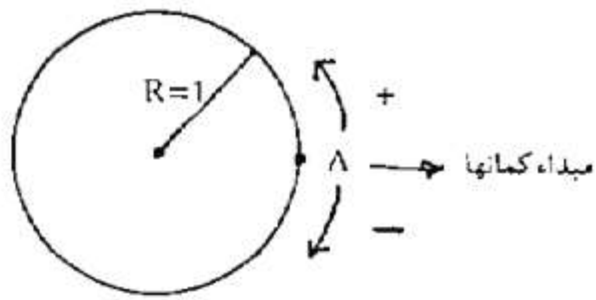
تذکر : برای تبدیل رادیان به درجه کافی است بجای π مقدار معادل آن یعنی 180° را قراردهیم

مثال ۲ : $\frac{\pi}{12}$ رادیان چند درجه است.

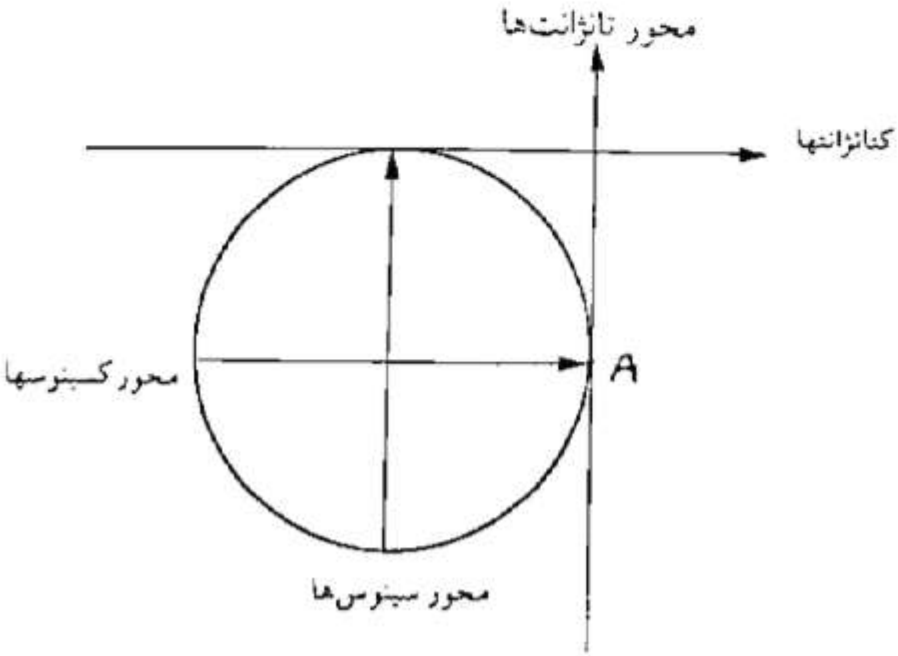
$$\frac{\pi}{12} = \frac{180}{12} = 15^\circ$$

۳ - تعریف دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت روی این دایره خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و نقطه‌ای روی آن مثل A به نام مبداء کمانها می‌باشد.

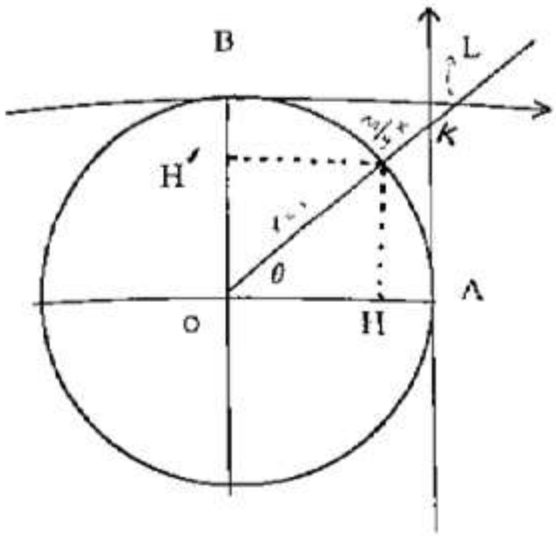


۴ - **محورهای مثلثاتی** : درمثلثات چهار محور موجوداست که به ترتیب عبارتند از محور سینوسها، محور کسینوسها، محور تانژانت‌ها و محور کتانژانت‌ها که وضع آنها نسبت به دایرهٔ مثلثاتی مانند شکل مقابل است.



۵ - نسبت‌های مثلثاتی :

اگر M انتهای کمانی باشد مطابق شکل $\overline{OH'}$ سینوس و $\overline{OH}$ کسینوس و $\overline{AK}$ تانژانت و $\overline{BL}$: کتانژانت این کمان گوئیم.



$$\sin\theta = \overline{OH'} \quad \tan\theta = \overline{AK}$$

$$\cos\theta = \overline{OH} \quad \cot\theta = \overline{BL}$$

۶ - علامت توابع مثلثاتی

انتهای کمان M	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$Sin\theta$	+	+	−	−
$Cos\theta$	+	−	−	+
$Tan\theta$	+	−	+	−
$Cot\theta$	+	−	+	−

۷ - با توجه به تعاریف قبل می توان نتیجه گرفت

$-1 \le Sin\,\theta \le 1 \qquad -\infty < tan\,\theta < +\infty$

$-1 \le Cos\,\theta \le 1 \qquad -\infty < Cot\,\theta < +\infty$

تذکر : نسبت‌های مثلثاتی گفته شده در بند ۵ همان تعریفی است که در ریاضی I آمده است یعنی

$$Sin\,\theta = \frac{y}{r} \qquad tan\,\theta = \frac{y}{x}$$

$$Cos\,\theta = \frac{x}{r} \qquad Cot\,\theta = \frac{x}{y}$$

x و y اختصات نقطه‌ی M در شکل بالا هستند

توجه : با داشتن روابط چهارگانهٔ فوق می‌توان نسبت‌های مثلثاتی کمانی را با معلوم بودن یک نسبت بدست آورد. برای این منظور کافی است ابتدا مجهول مسئله x ، y یا r را با یکی از دستورهای زیر یافت

هنگامی که x یا y مجهول باشد $\rightarrow x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$

هنگامی که r مجهول باشد $\rightarrow r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

مثال ۳ : اگر $sin\,\theta=\frac{۳}{۵}$ و θ در ربع دوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید

داریم $\quad Sin\,\theta=\frac{y}{r}$

دادهٔ مسئله $\quad Sin\,\theta=\frac{۳}{۵}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y=۳ \\ r=۵ \\ x=? \end{array}$$

چون مجهول مسئله x است پس از رابطهٔ اول استفاده می‌کنیم

$$x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$$

$$x^{۲}+۳^{۲}=۵^{۲}\Rightarrow x^{۲}+۹=۲۵\Rightarrow x^{۲}=۱۶$$

$$x=\pm ۴$$

چون θ در ربع دوم است پس انتهای کمان در ناحیهٔ دوم است یعنی x منفی قابل قبول بوده

لذا $x=-۴$

$$cos\,\theta=\frac{x}{r}=\frac{-۴}{۵}$$

$$tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{۳}{-۴}$$

$$Cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-۴}{۳}$$

مثال ۴ : اگر $tan\;\theta=۱$ و θ در ربع اول باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید

داریم $\quad tan\,\theta=\frac{y}{x}$

دادهٔ مسئله $\quad tan\theta=۱$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y=۱ \\ x=۱ \\ r=? \end{array}$$

چون r مجهول است از دستور دوم استفاده می‌کنیم.

$$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}} \Rightarrow r=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1 \qquad Sin\,\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{1}{1}=1 \qquad Cos\,\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

«می‌توان $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را به صورت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ نیز نوشت»

مثال ۵: اگر $\tan\theta=2$ و θ در ربع سوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل: ممکن است دانش‌آموزی چنین استدلال کند.

داریم $\tan\theta=\frac{y}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \\ r=? \end{cases}$$

دادهٔ مسئله $\tan\theta=2$

ارچند ظاهراً استدلال دانش‌آموز درست است ولی باید توجه کنیم چون x و y در ناحیه سوم هر دو منفی‌اند پس $y=-2$ و $x=-1$ بوده است لذا داریم:

$$y=-2 \qquad r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\sqrt{(-1)^{2}+(-2)^{2}}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$x=-1$$

$$r=? \qquad Sin\,\theta=\frac{y}{r}=\frac{-2}{\sqrt{5}} \qquad Cos\,\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{5}} \qquad Cot\,\theta=\frac{x}{y}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

نتیجه: اگر $\tan\theta=a$ یا $Cot\,\theta=a$ و انتهای کمان در ناحیه سوم باشد آنگاه x و y هر دو منفی‌اند.

تمرین: اگر $Sin\,\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و θ زاویه‌ای در ربع اول باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

۸ - روابط بین نسبت‌های مثلثاتی یک کمان

$۱) Sin^{۲}\theta + cos^{۲}\theta = ۱ \Rightarrow \begin{cases} Sin^{۲}\theta = ۱ - cos^{۲}\theta \\ cos^{۲}\theta = ۱ - Sin^{۲}\theta \end{cases}$

$۲) \tan\theta = \frac{Sin\,\theta}{cos\,\theta}$

$۳) cot\,\theta = \frac{cos\,\theta}{Sin\,\theta}$

$۴) \tan\theta\, cot\theta = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \tan\,\theta = \frac{۱}{cot\,\theta} \\ cot\,\theta = \frac{۱}{\tan\,\theta} \end{cases}$

$۵) ۱ + \tan^{۲}\theta = \frac{۱}{cos^{۲}\theta}$

$۶) ۱ + cot^{۲}\theta = \frac{۱}{sin^{۲}\theta}$

توجه ۱ : اگر sin یا cos کمانی داده شده باشد و بخواهیم سایر نسبت‌های آن کمان را پیدا کنیم به ترتیب می‌توان از روابط ۱ و ۲ و ۳ استفاده کرد

توجه ۲ : اگر tan یا cot کمانی داده شده باشد برای پیدا کردن سایر نسبت‌های آن کمان می‌توان از روابط (۴ و ۵ و ۶) یا (۴ و ۵ و ۱) یا (۴ و ۶ و ۱) استفاده کرد.

مثال ۶ : اگر $sin\ \theta = \frac{۳}{۵}$ و θ در ربع دوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید (قبلاً در مثال ۳ به روش دیگری حل شده)

$$cos^{۲}\theta = ۱ - sin^{۲}\theta$$

$$cos^{۲}\theta = ۱ - \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} \rightarrow cos^{۲}\theta = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow cos\theta = \pm\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \pm\frac{۴}{۵}$$

چون θ در ربع دوم است و cos در ربع دوم منفی است پس $-\frac{۴}{۵}$ جواب است.

$$\tan\theta = \frac{sin\,\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{-۴}{۵}} = -\frac{۳}{۴}$$

$$cot\ \theta = \frac{cos\,\theta}{sin\theta} = \rightarrow cot\,\theta = \frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{-۴}{۳}$$

مثال ۷: اگر $\tan\theta = 2$ و θ زاویه‌ای در ربع سوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید

توجه: این مسئله در مثال ۵ به روش دیگری حل شده است.

$$\xrightarrow{\text{بنابر رابطه ۲}} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابر رابطه ۵}} \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow 5\cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

در ناحیه سوم $\cos$ منفی پس $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

برای یافتن $\sin$ می‌توان از رابطهٔ ۱ یا ۶ یا ۲ نیز استفاده کرد.

$$\xrightarrow{\text{بنابر رابطه ۲}} \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow 2 = \frac{\sin\theta}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{} \sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

۹: جدول اندازهٔ نسبت‌های مثلثاتی بعضی از کمانها

θ رادیان	۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
θ درجه	۰	۱۵°	۲۲/۵°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۷۵°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱-	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱-	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$۲-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۲}-۱$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$۲+\sqrt{۳}$	ت ن	$-\sqrt{۳}$	۱-	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ت ن	۰
$\cot\theta$	ت ن	$۲+\sqrt{۳}$	$\sqrt{۲}+۱$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$۲-\sqrt{۳}$	۰	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱-	$-\sqrt{۳}$	ت ن	۰	ت ن

تذکر ۱: منظور از ت ن در جدول فوق یعنی تعریف نشده

تذکر ۲: اگر مجموع دو زاویه ۹۰° شود (متمم باشند) آنگاه sin یکی برابر cos دیگری و tan یکی برابر cot دیگری و بر عکس است. به نسبت‌های مثلثاتی ۱۵° و ۷۵° نگاه کنید.

نکته : هر کمانی که به صورت $\frac{(n-1)\pi}{n}$ باشد انتهایش در ربع دوم است.

هر کمانی که به صورت $\frac{(n+1)\pi}{n}$ باشد انتهایش در ربع سوم است.

هر کمانی که به صورت $\frac{(2n-1)\pi}{n}$ باشد انتهایش در ربع چهارم است.

مثال ۸

$$\sin\frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} = \frac{1}{2}$$

یعنی $\sin\frac{5\pi}{6}$ برابر همان $\sin\frac{\pi}{6}$ است.

$$\sin\frac{7\pi}{6} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} = -\frac{1}{2}$$

یعنی $\sin\frac{7\pi}{6}$ همان $\sin\frac{\pi}{6}$ با این تفاوت که در ناحیه سوم $\sin$ منفی است .

$$\sin\frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

معرفی سکانت و کسکانت :

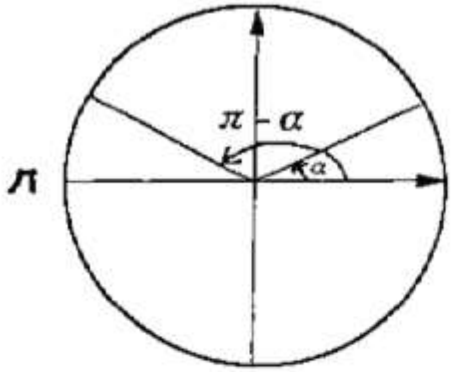
$$\mathrm{I}: \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x \sec x = 1$$

$$\mathrm{II}: \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \sin x \csc x = 1$$

۱۰ : روابط بین توابع مثلثاتی دو کمان که مجموع آنها 180° یا π رادیان است.

در این حالت انتهای این دو کمان نسبت به محور سینوسها قرینه یکدیگرند و اگر یکی از کمانها را α فرض کنیم کمان دیگر $\pi - \alpha$ خواهد شد.



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

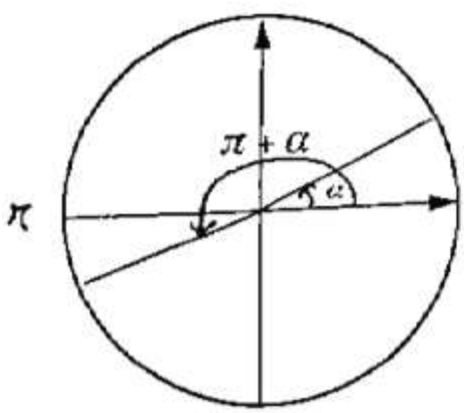
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

نکته : اگر انتهای کمانی در ربع دوم قراربگیرد برای بدست آوردن نسبت‌های مثلثاتی آن از دستورات بند ۱۰ استفاده می‌کنیم.

۱۱) روابط بین توابع مثلثاتی دو کمان که تفاضل آنها 180° یا π رادیان است. در این حالت

انتهای دو کمان نسبت به مرکز دایره مثلثاتی قرینه‌ی یکدیگرند

اگر یکی از کمان‌ها را α فرض کنیم کمان دیگر $\pi+\alpha$ می‌شود.



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

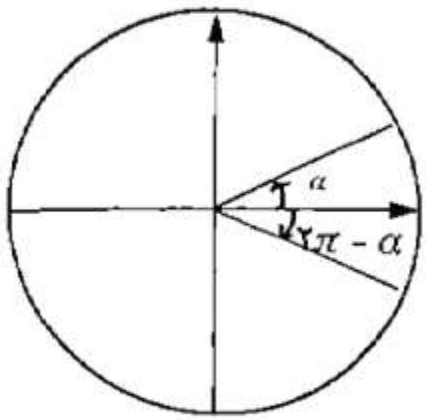
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

۱۲) روابط بین توابع مثلثاتی دو کمان که مجموع آنها 2π رادیان یا 360° است.

در این حالت انتهای دو کمان نسبت به محور کسینوسها قرینه‌اند و اگر یکی از کمان‌ها را α فرض کنیم کمان دیگر α - ۲π می‌شود.



$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

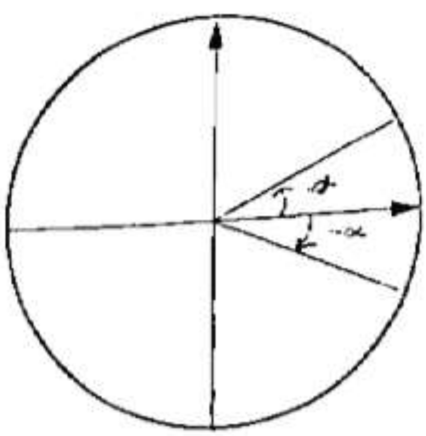
$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

اگر انتهای کمان در ربع چهارم باشد از روابط بند ۱۲ استفاده می‌کنیم.

۱۳) روابط بین توابع مثلثاتی دو کمان α و α -

در این حالت نیز انتهای دو کمان α و α - نسبت به محور کسینوسها قرینه‌اند لذا داریم



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

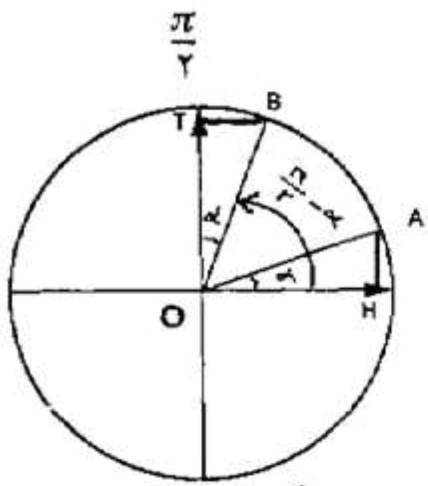
۱۴) روابط بین توابع مثلثاتی دو کمان که مجموع آنها °۹۰ یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد.

اگر یکی از کمان‌ها را α بگیریم کمان دیگر $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ است.

از همنهشتی دو مثلث $O\overset{\triangle}{A}H$ و $O\overset{\triangle}{B}T$ داریم

$$AH = BT \Rightarrow \sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$$

$$OH = OT \Rightarrow \cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$$



بنابر این داریم :

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan\alpha$$

اثبات همنهشتی دو مثلث و روابط $\tan$ و $\cot$ به عهده دانش‌آموز

۱۵) روابط بین توابع مثلثاتی دو کمان که تفاضل آنها $\frac{\pi}{۲}$ رادیان یا ۹۰° است، اگر یکی از کمان‌ها را α فرض کنیم کمان دیگر $\frac{\pi}{۲} + \alpha$ می‌شود.

توجه : در این حالت روابط مانند حالت ۱۴ است با این تفاوت که انتهای کمان در ربع دوم است لذا فقط سینوس $\sin$ مثبت است

$$\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

۱۶ - اگر $K\in Z$ روابط زیر برقرارند.

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

مثال $\sin\left(12\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

$$\sin(k\pi+\alpha)=(-1)^k\sin\alpha$$

$$\cos(k\pi+\alpha)=(-1)^k\cos\alpha$$

$$\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

$\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^7\sin\frac{\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ مثال

$$\sin(k\pi-\alpha)=(-1)^{k+1}\sin\alpha$$

$$\cos(k\pi-\alpha)=(-1)^k\cos\alpha$$

$$\tan(k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

$\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=(-1)^3\cos\frac{\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ مثال

$$\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=(-1)^4\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

۱۷) محاسبه نسبت‌های مثلثاتی مجموع دوکمان

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{۱-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

یا $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-۱}{\cot\alpha+\cot\beta}$

۱۸) محاسبه نسبت‌های مثلثاتی تفاضل دو کمان

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{۱+\tan\alpha.\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

یا $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha.\cot\beta+۱}{\cot\beta-\cot\alpha}$

۱۹): تبدیل مجموع به حاصل ضرب یا تفاضل به حاصلضرب :

با توجه به بندهای ۱۷ و ۱۸ داشتیم

$$\text{I)}\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\text{II)}\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

فرض $\alpha+\beta=P$

$\alpha-\beta=q$

$$\xrightarrow{\text{از حل این دستگاه}}\quad \alpha=\frac{p+q}{۲},\quad \beta=\frac{p-q}{۲}$$

حال ضمن اینکه در روابط I و II به جای $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ به ترتیب مساوی آنها q,p را قرار می‌دهیم رابطهٔ II را از I کم می‌کنیم:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=[\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta]-[\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta]$$

$$\sin(p) - \sin(q) = ۲\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin p - \sin q = ۲\cos\frac{p+q}{۲}\sin\frac{p-q}{۲}$$

اینبار دو رابطهٔ I و II را با هم جمع می‌کنیم.

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = [\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta] + [\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta]$$

$$\sin p + \sin q = ۲\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \sin p + \sin q = ۲\sin\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$$

بنابر این بطور مشابه می‌توان ثابت کرد. که ...

۱. $\sin p + \sin q = ۲\sin\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$

۲. $\sin p - \sin q = ۲\sin\frac{p-q}{۲}\cos\frac{p+q}{۲}$

۳. $\cos p + \cos q = ۲\cos\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$

۴. $\cos p - \cos q = -۲\sin\frac{p+q}{۲}\sin\frac{p-q}{۲}$ یا $۲\sin\frac{p+q}{۲}\sin\frac{q-p}{۲}$

۵. $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$

۶. $\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p.\cos q}$

۷. $\cot p + \cot q = \frac{\sin(q+p)}{\sin p.\sin q}$

$$۸ . \cot p - \cot q = \frac{\sin (q-p)}{\sin p . \sin q}$$

۲۰ - تبدیل حاصل ضرب به مجموع :

$$\sin a \cos b = \frac{۱}{۲} [\sin (a+b) + \sin (a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{۱}{۲} [\cos (a+b) + \cos (a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{۱}{۲} (\cos (a-b) - \cos (a+b))$$

مثال ۹ مقدار $\cos ۲۰ - \cos ۴۰$ کدام است .

۱) $\sqrt{۳} \cos ۱۰$ ۲) $\sin ۱۰$ ۳) $\sqrt{۳} \sin ۱۰$ ۴) $\cos ۱۰$

حل : $\cos ۲۰ - \cos ۴۰ = -۲ \sin \frac{۲۰ + ۴۰}{۲} \sin \frac{۲۰ - ۴۰}{۲}$ بنابر ۴

چون $\sin (-۱۰) = -\sin ۱۰$ $= -۲ \sin ۳۰ \sin -۱۰$

$$= ۲ \sin ۳۰ \sin ۱۰ = \sin ۱۰$$

نکته : در تبدیل مجموع یا تفاضل دو تابع مثلثاتی به حاصلضرب اگر توابعی که می‌خواهیم به حاصلضرب تبدیل کنیم از یک جنس نباشند باید با استفاده از کمان‌های متمم آنها را به یک جنس تبدیل کنیم. به عنوان مثال در عبارت زیر داریم

$$\sin ۵۵° - \cos ۱۵°$$

$$= \cos (۹۰ - ۵۵) - \cos ۱۵°$$

$$= \cos ۳۵° - \cos ۱۵° = -۲ \sin \frac{۳۵ + ۱۵}{۲} \sin \frac{۳۵ - ۱۵}{۲} = -۲ \sin ۲۵° \sin ۱۰°$$

نکته : اگر در عباراتی که می‌خواهیم به حاصلضرب تبدیل کنیم عدد ثابتی وجود داشته باشد دو

حالت اتفاق می‌افتد

I) اگر آن عدد ثابت طبق شرایط مسئله تابع مثلثاتی کمان معینی باشد به جای آن ، تابع مثلثاتی آن کمان معین را قرارمی‌دهیم.

II) اگر عدد موجود در مسئله تابع مثلثاتی کمان معینی نباشد از خود آن عدد یا هر عدد دلخواه دیگری فاکتور می‌گیریم تا عدد ثابت در مسئله به تابع مثلثاتی کمان معینی تبدیل شود آنگاه مانند حالت I مسئله را حل می‌کنیم.

به عنوان مثال برای تبدیل مجموع زیر به حاصلضرب چنین عمل می‌کنیم.

$$\sqrt{3} + 2\sin 4x$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 4x\right)$$
$$= 2\left(\sin 60 + \sin 4x\right)$$
$$= 2\left(2\sin\frac{60 + 4x}{2}\cos\frac{60 - 4x}{2}\right) = 4\sin(30 + 2x)\cos(30 - 2x)$$

مثال ۱۰ : درستی تساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$$

حل : به جای $\tan$ قرار می‌دهیم $\frac{\sin}{\cos}$ و به جای cot نیز $\frac{\cos}{\sin}$

$$\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin^۳\theta}{\cos\theta[\sin\theta - \cos\theta]} + \frac{\cos^۳\theta}{\sin\theta[\cos\theta - \sin\theta]}$$

$$= \frac{\sin^۳\theta - \cos^۳\theta}{(\sin\theta - \cos\theta).\sin\theta.\cos\theta} = \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^۲\theta + \sin\theta.\cos\theta + \cos^۲\theta)}{(\sin\theta - \cos\theta).\sin\theta.\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^۲\theta}{\sin\theta.\cos\theta} + \frac{\sin\theta.\cos\theta}{\sin\theta.\cos\theta} + \frac{\cos^۲\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + ۱ + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\theta + ۱ + \cot\theta$$

تمرین : درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(\sec\theta - \tan\theta)^۲ = \frac{۱ - \sin\theta}{۱ + \sin\theta}$$

مثال ۱۱ : نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۱۵ْ را حساب کنید.

داریم : $۱۵^\circ = ۶۰ - ۴۵$

$$\sin ۱۵^\circ = \sin(۶۰ - ۴۵) = \sin ۶۰ \cdot \cos ۴۵ - \cos ۶۰ \cdot \sin ۴۵$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۶}}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos ۱۵^\circ = \cos(۶۰ - ۴۵) = \cos ۶۰ \cdot \cos ۴۵ + \sin ۶۰ \cdot \sin ۴۵$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۴} + \frac{\sqrt{۶}}{۴} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\tan ۱۵^\circ = \tan(۶۰ - ۴۵) = \frac{\tan ۶۰ - \tan ۴۵}{۱ + \tan ۶۰ \cdot \tan ۴۵} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۱ + \sqrt{۳} \times ۱} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۱ + \sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کردن}} \frac{\sqrt{۳}-۱}{۱+\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱} = \frac{(\sqrt{۳}-۱)^۲}{۲} = \frac{۳-۲\sqrt{۳}+۱}{۲}$$

$$= \frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲(۲-\sqrt{۳})}{۲} = ۲-\sqrt{۳}$$

$$\cot ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲-\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{گویا کردن}} ۲+\sqrt{۳}$$

تمرین نسبت‌های مثلثاتی °۷۵ را حساب کنید :

راهنمایی : از ویژگی دو زاویهٔ متمم استفاده کنید. یعنی

$$\sin ۷۵^\circ = \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

۲۱ - محاسبه نسبت‌های مثلثاتی کمان ۲α

$$\sin(۲\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

بطور مشابه داریم

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{یا} \quad \sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \quad \text{یا} \quad = ۱-۲\sin^۲\alpha \quad \text{یا} \quad = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \quad \text{یا} \quad = \frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

$$\cot ۲\alpha = \frac{\cot^۲\alpha - ۱}{۲\cot\alpha}$$

۲۲ - محاسبه نسبت‌های مثلثاتی کمان ۳α

$$\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$$

$$\cos ۳\alpha = ۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

$$\cot 3\alpha = \frac{3\cot\alpha - \cot^3\alpha}{1 - 3\cot^2\alpha}$$

۲۳ - محاسبه نسبت‌های مثلثاتی نصف قوس

از روابط ۲۱ می‌توان نتیجه گرفت

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$$

۲۴ - در حل تست‌های مثلثاتی می‌توان از اتحادهای زیر بهره‌برد

$$1.\ \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$2.\ \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$3.\ \tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$4.\ \cot^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

$$۵. \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

$$۶. \tan\alpha - \cot\alpha = -۲\cot ۲\alpha$$

$$۷. \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha.\cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$$

$$۸. \sin^۴\alpha - \cos^۴\alpha = -\cos ۲\alpha$$

$$۹. \sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ۱ - ۳\sin^۲\alpha.\cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha$$

$$۱۰. \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{۲}\sin(\alpha + \frac{\pi}{۴}) \text{ یا } = \sqrt{۲}\cos(\alpha - \frac{\pi}{۴})$$

$$۱۱. \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{۲}\sin(\alpha - \frac{\pi}{۴}) \text{ یا } = -\sqrt{۲}\cos(\alpha + \frac{\pi}{۴})$$

$$۱۲. ۱ + COS\alpha = ۲COS^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$۱۳. ۱ - COS\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$۱۴. \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^۲\alpha - \sin^۲\beta = \cos^۲\beta - \cos^۲\alpha$$

$$۱۵. \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^۲\alpha - \sin^۲\beta = \cos^۲\beta - \sin^۲\alpha$$

اثبات برخی از روابط بند ۲۴ به شرح ذیل است.

با توجه به اتحاد $a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$ داریم

$$۹) \sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha$$

$$= (\sin^۲\alpha)^۳ + (\cos^۲\alpha)^۳$$

$$= (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۳ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha(\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)$$

$$= ۱ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

$$= ۱ - ۳(\sin\alpha\cos\alpha)^۲ = ۱ - ۳(\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha)^۲ = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha$$

$$۱۰)\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$=\sqrt{۲}\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{۲}}+\frac{\cos\alpha}{\sqrt{۲}}\right)$$

$$=\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin\alpha+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos\alpha\right)$$

$$=\sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴}\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha\right)$$

$$=\sqrt{۲}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۴}\right)$$

برای اثبات ۱۰ از $\sqrt{۲}$ فاکتور می‌گیریم

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

تذکر : رابطهٔ ۱۰ حالت خاصی از قضیهٔ زیر است که اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم

قضیه : اگر اعداد حقیقی a و b با هم صفر نباشند آنگاه

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\sin(\alpha+\beta)$$

که در آن $\tan\beta=\frac{b}{a}$ یا $\beta=Arc\tan\frac{b}{a}$

$$۱۳)\ ۱-\cos\alpha$$

$$=\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}+\cancel{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}-\left(\cancel{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}\right)=۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

یا $$=۱-\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}+\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

$$=\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}+\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}=۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

مثال ۱۲

مقدار $\sin^{۶}۲۲/۵+\cos^{۶}۲۲/۵$ کدام است

۱) ۱   ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) هیچکدام

جواب : بنابر رابطه ۹ از بند ۲۴ داریم :

گزینه ۲ $sin^{6} 22/5 + cos^{6} 22/5 = 1 - \frac{3}{4}sin^{2} 45 = 1 - \frac{3}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2} = \frac{5}{8}$

مثال ۱۳

حاصل $cot 20 - 2cot 40 + tan 20$ کدام است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $cot 20$ ۴) $tan 20$

جواب : بنابر رابطهٔ ۶ از بند ۲۴ داریم :

$$\underbrace{tan 20 - cot 20}_{-2cot 40} + 2cot 40 = 0$$

تمرین : حاصل عبارت

$2tan 2\alpha - 4tan 4\alpha - 8tan 8\alpha + cot \alpha - tan \alpha - 16tan 16\alpha$ - را ساده کنید.

مثال ۱۴ : اگر $sin \theta = t$ و θ در ربع اول باشد آنگاه حاصل $\sqrt{2} sin (\theta - \frac{\pi}{4})$ را بیابید:

جواب : بنابر رابطه ۱۱ از بند ۲۴ داریم

$sin \theta = t$

$\Rightarrow cos^{2} \theta = 1 - sin^{2} \theta$

$cos^{2} \theta = 1 - t^{2}$

$cos \theta = \pm \sqrt{1 - t^{2}}$

ناحیه اول + ق ق

$$\sqrt{2} sin (\theta - \frac{\pi}{4}) = sin \theta - cos \theta$$
$$= t - \sqrt{1 - t^{2}}$$

تذکر : از دستور $sin (\alpha \pm \beta)$ نیز می توانید استفاده کنید.

۲۵ – معادله مثلثاتی :

هرگاه دو عبارت مثلثاتی مانند A و B فقط به ازای بعضی از مقادیر با هم مساوی شوند آنگاه رابطهٔ A=B را یک معادله‌ی مثلثاتی تعریف می‌کنیم.

مانند $\cos 3x = \sin 2x$ که به ازای برخی مقادیر از x تساوی برقرار است.

۲۶ – حل معادله‌ی مثلثاتی :

برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی ابتدا به کمک روابط مثلثاتی گفته شده و دستورات جبری تا جایی که ممکن است آن را ساده می‌کنیم تا در نهایت به یکی از صورتهای زیر درآید

$\sin x = \sin \alpha$ یا $\cos x = \cos \alpha$ یا $\tan x = \tan \alpha$ یا $\cot x = \cot \alpha$

برای هر کدام از موارد فوق جواب‌های کلی زیر را داریم

حالت اول : $\sin x = \sin \alpha \xrightarrow[\text{کلی}]{\text{جواب‌های}} \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2K\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad K \in Z$

حالت دوم : $\cos x = \cos \alpha \xrightarrow[\text{کلی}]{\text{جواب‌های}} \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2K\pi - \alpha \end{cases} \quad K \in Z$

حالت‌سوم : $\tan x = \tan \alpha \xrightarrow[\text{کلی}]{\text{جواب‌های}} x = k\pi + \alpha \quad K \in Z$

حالت چهارم : $\cot x = \cot \alpha \xrightarrow[\text{کلی}]{\text{جواب‌های}} x = k\pi + \alpha \quad K \in Z$

۲۷ – حالات خاص :

اگر در روند حل به یکی از حالت‌های خاص زیر رسیدید از دستورهای داده شده استفاده کنید.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

۲۸ – اگر در روند حل به یکی از حالت‌های $\sin x = \cos \alpha$ یا غیره رسیدید از دستورات زیر استفاده کنید.

$$\sin x = \cos\alpha \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\sin x = -\sin\alpha \Rightarrow \sin x = \sin(-\alpha)$$

$$\sin x = -\cos\alpha \Rightarrow \sin x = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = -\cos\alpha \Rightarrow \cos x = \cos(\pi - \alpha)$$

$$\cos x = \sin\alpha \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos x = -\sin\alpha \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\tan x = -\tan\alpha \Rightarrow \tan x = \tan(-\alpha)$$

$$\tan x = \cot\alpha \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$$

$$\tan x = -\cot\alpha \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right)$$

$$\cot x = -\cot\alpha \Rightarrow \cot x = \cot(\pi - \alpha)$$

$$\cot x = \tan\alpha \Rightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$$

$$\cot x = -\tan\alpha \Rightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right)$$

مثال ۱۵ : معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های بین $[۰, ۲\pi]$ را پیدا کنید.

I) $\sin ۲x = \cos x$

جواب : این مسئله را می‌توان به دو روش حل کرد.

$$۲\sin x\cos x = \cos x$$

$$۲\sin x\cos x - \cos x = ۰ \xrightarrow[\text{فاکتور}]{\cos x \ \text{از}} \cos x\,[۲\sin x - ۱] = ۰$$

$$\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad \text{I}$$

$$۲\sin x - ۱ = ۰ \rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲K\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲K\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲K\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲K\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \quad \text{II}$$

حال در روابط I و II به K مقادیر صحیح می‌دهیم تا جواب‌های بین $[۰, ۲\pi]$ مشخص شود.

می‌توان به k هر مقدار دلخواه صحیحی داد

K	X		
۰	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
۱	$\frac{۳\pi}{۲}$		

اما جواب‌های بین $[۰ , ۲\pi]$ منظور ما بوده است. $\{\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲}\}$ = مجموعه‌جواب

روش دوم: بجای $\cos x$ قرارمی‌دهیم $\sin(\frac{\pi}{۲} - x)$

$$\sin ۲x = \cos x$$

$$\sin ۲x = \sin(\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + (\frac{\pi}{۲} - x) \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

K	X	
۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$
۱	$\frac{۵\pi}{۶}$	
۲	$\frac{۳\pi}{۲}$	

II) $۲\sin^۲ x - ۳\cos x + ۳ = ۰$

جواب : ابتدا به جای sin^2x مقدار مساوی آن $1 - cos^2x$ را قرار می‌دهیم تا معادله به یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب cos تبدیل شود.

$$2(1 - cos^2x) - 3cos x + 3 = 0$$

$$2 - 2cos^2x - 3cos x + 3 = 0$$

$$-2cos^2x - 3cos x + 5 = 0$$

چون مجموع ضرایب صفر است پس یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

$a = -2$

$b = -3$

$c = 5 \quad \Rightarrow \quad cos x = 1$

$cos x = \frac{-5}{2}$ غ ق ق

چون cos نمی‌تواند بیشتر از ۱ و کمتر از ۱- باشد

اما $cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

K	X
۰	۰
۱	2π

III) $cos 2x + cos x + 1 = 0$

$$2cos^2x - 1 + cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2cos^2x + cos x = 0 \xrightarrow[\text{فاکتور}]{\text{از } cos x}$$

$$cos x\,[2cos x + 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2cos x + 1 = 0 \rightarrow cos = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$* \Rightarrow cos x = -cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow cos x = cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

K	X	
۰	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$
۱	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۴\pi}{۳}$

* **تذکر** : به جای $\frac{-۱}{۲}$ مقدار مساویش $\cos\frac{\pi}{۳}$ - را قرار داده‌ایم

۲۹ - قابل توجه است که انواع معادلات مثلثاتی بسیار زیاد و تبدیل آنها به معادلات سادهٔ چهارگانه همیشه امکان‌پذیر نیست بنابر این برخی از آنها را به عنوان معادلات کلاسیک بررسی می‌کنیم .

۳۰ - معادلات کلاسیک

I) معادله کلاسیک نوع اول : صورت کلی آن عبارتست از $a\sin x + b\cos x = c$ و $b \neq ۰$ و a

تذکر : این معادله دارای جواب است اگر $a^۲ + b^۲ \geq c^۲$ باشد

برای حل ابتدا $\frac{b}{a}$ را تشکیل می‌دهیم، اگر مقدار $\frac{b}{a}$ برابر $\tan$ زاویهٔ معلومی مانند α شد داریم

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$ طرفین را بر a تقسیم می‌کنیم $\qquad \frac{b}{a} = \tan\alpha$

$$\sin x + \tan\alpha\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{c}{a} \xrightarrow[\cos\alpha]{\text{ضرب در}} \sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

و این معادلهٔ قابل حل است.

$$\Rightarrow \sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

اما اگر $\frac{b}{a}$ برابر $\tan$ زاویهٔ معلومی نباشد از دستورات زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

حال در معادلهٔ کلاسیک نوع اول داده شده بجای $\sin x$ و $\cos x$ مقادیر فوق را قرار می‌دهیم که پس از ساده کردن آن داریم

$$(b+c)\tan^2\frac{x}{2}-2a.\tan\frac{x}{2}+(c-b)=0$$

که معادله‌ی اخیر یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $\tan\frac{x}{2}$ و قابل حل است.

مثال ۱۶ : معادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$2\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$$

$$a=2 \;,\; b=1 \;,\; c=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{2})\tan^2\frac{x}{2}-2\times 2\tan\frac{x}{2}+(\frac{1}{2}-1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0$$

یک معادلهٔ درجهٔ دوم است

$$a=\frac{3}{2} \;,\; b=-4 \;,\; c=\frac{-1}{2}$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=19\Rightarrow \begin{cases}\tan\frac{x}{2}=\frac{4+\sqrt{19}}{3}\\[2mm] \tan\frac{x}{2}=\frac{4-\sqrt{19}}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}=k\pi+\mathrm{Arctan}\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)\\[2mm] \frac{x}{2}=k\pi+\mathrm{Arctan}\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+2\mathrm{Arctan}\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)\\[2mm] x=2k\pi+2\mathrm{Arctan}\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\end{cases}$$

تذکر: اگر در معادله‌ی کلاسیک نوع اول $c=0$ باشد بهتر است طرفین آن را بر $\sin x$ یا $\cos x$

تقسیم کنیم

مثال ۱۷ - معادلهٔ مقابل را حل کرده و جواب‌های بین $[۰ , ۲\pi]$ آنرا معین کنید.

$\sqrt{۳}\cos x + \sin x = ۰$ تقسیم بر $\cos x$

$\sqrt{۳} + \tan x = ۰ \Rightarrow \tan x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \tan x = \tan(\frac{-\pi}{۳})$

$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$

K	X
۰	ندارد
۱	$\frac{۲\pi}{۳}$
۲	$\frac{۵\pi}{۳}$

$k = ۰ \Rightarrow x = \frac{-\pi}{۳}$ بین فاصلهٔ داده شده نیست

II : معادله‌ی کلاسیک نوع دوم : فرم کلی آنها بصورت $a\tan x + b\cot x = c$ می‌باشد

برای حل این نوع معادله بجای $\cot x$ مساویش $\frac{۱}{\tan x}$ را قرارمی‌دهیم

طرفین را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم

$a\tan x + b \times \frac{۱}{\tan x} = c$

که یک معادلهٔ درجه ۲ است.

$a\tan^۲ x + b = c\tan x \Rightarrow a\tan^۲ x - c\tan x + b = ۰$

مثال ۱۸ - معادلهٔ مقابل را حل کنید.

$۵\tan x + ۵\cot x = ۱۰$

$۵\tan x + \frac{۵}{\tan x} = ۱۰$

$۵\tan^۲ x + ۵ = ۱۰\tan x \Rightarrow ۵\tan^۲ x - ۱۰\tan x + ۵ = ۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac \Rightarrow \Delta = ۱۰۰ - ۱۰۰$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \xrightarrow[\text{مضاعف}]{\text{ریشه}} \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

III : معادله‌ی کلاسیک نوع سوم : فرم کلی آنها بصورت زیر می‌باشد

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

برای حل در صورتیکه $a = d$ طرفین معادله را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم تا معادله به شکل زیر درآید

$$a + b\cot x + c\cot^2 x = d\frac{1}{\sin^2 x}$$

که بجای $\frac{1}{\sin^2 x}$ مقدار مساویش $1 + \cot^2 x$ را قرارمی‌دهیم تا در نهایت معادله بصورت زیر درآید.

$$(c-d)\cot^2 x + b\cot x + (a-d) = 0$$

اما اگر $a \neq d$ طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم تا معادله به شکل زیر درآید

$$(a-d)\tan^2 x + b\tan x + (c-d) = 0$$

مثال ۱۹ : معادله مقابل را حل کنید. $3\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3$

جواب : چون $a = d$

$$a = 3 \quad b = -\sqrt{3} \quad c = 4 \quad d = 3$$

$$(4-3)\cot^2 x - \sqrt{3}\cot x + (3-3) = 0$$

$$\cot^2 x - \sqrt{3}\cot x = 0$$

$$\cot x(\cot x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cot x = 0 \Rightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

IV معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم

شکل کلی آنها به یکی از صورت‌های زیر است. $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$

$a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c$

برای حل اولی از روابط ۱۰ و ۱۱ از بند ۲۴ کمک می‌گیریم

$\sin x\cos x=\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$ و $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

پس در معادلهٔ اول بجای $\sin x+\cos x$ و $\sin x\cos x$ مقادیر مساویشان را قرار می‌دهیم به این ترتیب معادله به صورت زیر در می‌آید.

$$a[\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})]+b[\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}]=c$$

پس از ساده کردن و ضرب طرفین در ۲ داریم

$$2b\cos^2(x-\frac{\pi}{4})+2a\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})-b-2c=0$$

که یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $\cos(x-\frac{\pi}{4})$ است.

برای حل دومی نیز داریم

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}-\sin^2(x-\frac{\pi}{4})$$

پس از قراردادن موارد فوق در معادلهٔ $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c$ داریم

$$2b\sin^2(x-\frac{\pi}{4})-2a\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+(2c-b)=0$$

که یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $\sin(x-\frac{\pi}{4})$ می‌باشد.

تذکر: برای حل معادلات کلاسیک روش‌های دیگری نیز وجود دارد که بررسی آنها به عهدهٔ دانش‌آموز است.

مثال ۲۰ – معادله زیر را حل کرده و جواب‌های بین $[0, 2\pi]$ آن را بیابید.

$$2(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x=1$$

$a=2 \quad b=2 \quad c=1$

$$4\sin^2(x-\frac{\pi}{4}) - 4\sqrt{2}\,\sin(x-\frac{\pi}{4}) = 0$$

فاکتورگیری

$$4\sin(x-\frac{\pi}{4})(\sin(x-\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}) = 0$$

$$4\sin(x-\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ غ ق ق

K	X
۰	$\frac{\pi}{4}$
۱	$\frac{5\pi}{4}$

بین صفر و 2π تنها ۲ جواب دارد.

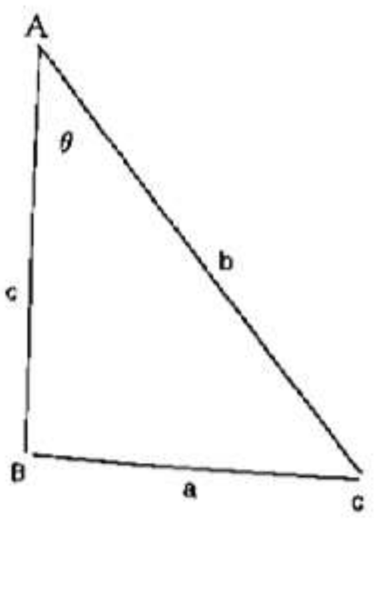
تمرین : معادلات زیر را حل کنید

I) $3\sin x - 2\cos x = 3$

II) $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$

III) $3\tan x - 2\cot x = 4$

۳۱ - نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه



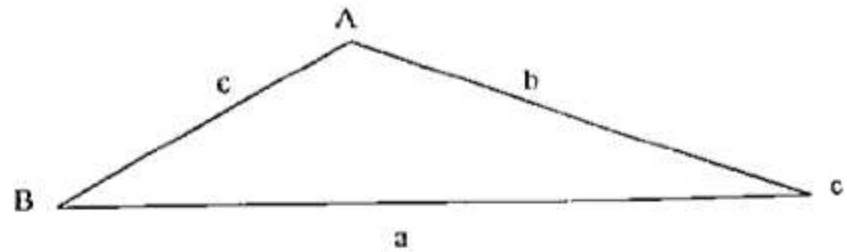
$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{a}{c}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{ضلع مقابل } \theta} = \frac{c}{a}$$

نکته : اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث دلخواه باشد آنگاه روابط زیر را داریم



R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

مثال ۲۱ - هرگاه در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داشته باشیم ۲ $=a$ و $b=\sqrt{6}$ و زاویهٔ $\hat{A}=45^\circ$ باشد زاویهٔ B چند درجه است. ۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۶۰

جواب $\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sin B}$ $\xrightarrow{\sin 45=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{2}{\sin 45}=\frac{\sqrt{6}}{\sin B}$

$$\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۴

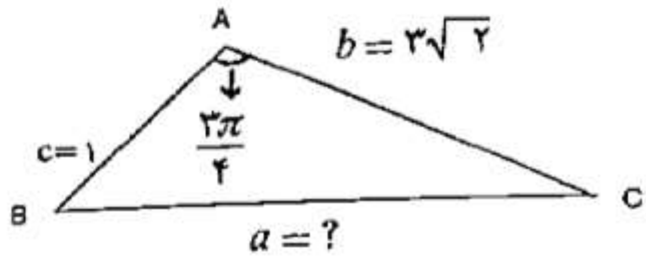
$$\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\hat{B}=60^\circ$$

مثال ۲۲ - در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ اگر ۱ $=AB$ و $AC=3\sqrt{2}$ و $\hat{A}=\frac{3\pi}{4}$ باشد BC کدام است؟ ۱) $\sqrt{13}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a^2=18+1-6\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}\qquad\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۲ $a^{۲} = ۲۵ \rightarrow a = ۵$



۳۲ - تابع متناوب :

تابعی مانند F را متناوب گوئیم اگر نمودارش در فواصل یکسان تکرار شود و به بیان ریاضی F متناوب است اگر برای هر X از دامنه و T مثبت X+T نیز عضو دامنه F باشد و $F(x+T) = F(x)$ به این ترتیب توابع $y = sin x$ و $y = cos x$ و $y = tan x$ و $y = cot x$ همگی متناوبند.

دورهٔ تناوب توابع sin و cos برابر ۲π ولی tan و cot برابر π است.

$$sin(x + ۲k\pi) = sin x$$

$$k = ۱ \Rightarrow T = ۲\pi$$

$$cos(x + ۲k\pi) = cos x$$

$$tan(x + k\pi) = tan x$$

$$k = ۱ \Rightarrow T = \pi$$

$$cot(x + k\pi) = cot x$$

نکته - دورهٔ تناوب توابع $sin nx$ و $cos nx$ برابر $\frac{۲\pi}{n}$

و دورهٔ تناوب توابع $tan nx$ و $cot nx$ برابر $\frac{\pi}{n}$

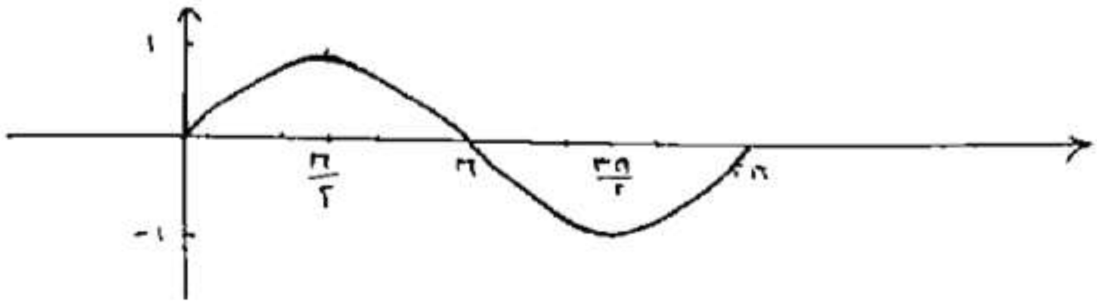
توجه: بحث دربارهٔ توابع متناوب که خارج از هدف این کتاب است را به درس حسابان موکول می‌کنیم.

۳۳ - رسم توابع $sin x$ و $cos x$ با نقطه یابی

I $y = sin x$ چون تابع sin متناوب و دورهٔ تناوب اصلی آن ۲π است لذا آن را در

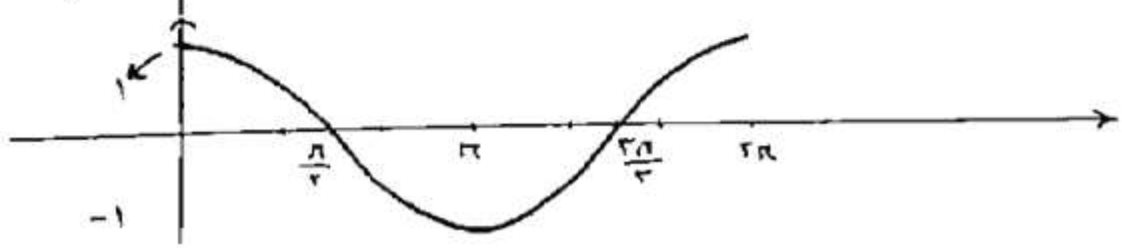
فاصلهٔ [۰ , ۲π] به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

X	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	۱-	۰



II $y = \cos x$

X	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	۱-	۰	۱



نکته : برای رسم توابعی مانند $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{۶}\right) + ۲$ به روش انتقال کافی است نمودار $y = \cos x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۶}$ به راست و ۲ واحد به سمت بالا منتقل کنیم.

نکته : برای رسم توابعی مانند $y = -\sin x$ به روش انتقال کافی است قرینه‌ی $y = \sin x$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

تمرین : نمودار $|y| = \sin x$ را رسم کنید.

توجه : رسم دقیق توابع مثلثاتی دربند ۳۶ همین کتاب آمده است.

۳۴ – دامنهٔ توابع مثلثاتی :

$$\left.\begin{array}{l} y = \sin x \\ y = \cos x \end{array}\right\} \Rightarrow D_y = IR$$

$y = \tan x \Rightarrow Dy = \{x \mid x \in IR \ s.t \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}\}$

$y = \cot x \Rightarrow Dy = \{x \mid x \in IR \ s.t \quad x \neq k\pi\}$

۳۵ - مشتق توابع مثلثاتی :

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$y = \tan x \Rightarrow y' = ۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} = \sec^۲ x$

$y = \cot x \Rightarrow y' = -(۱ + \cot^۲ x) = \frac{-۱}{\sin^۲ x} = -\csc^۲ x$

تذکر : درصورتی‌که‌تابع مثلثاتی علاوه بر توان و ضریب دارای کمان مشتق‌پذیر نیز باشدداریم

$y = m\sin^n U \Rightarrow y' = nmU'\cos U \sin^{n-۱} U$

$y = m\cos^n U \Rightarrow y' = -nmU'\sin U \cos^{n-۱} U$

$y = m\tan^n U \Rightarrow y' = nmU'(۱ + \tan^۲ U)\tan^{n-۱} U$

$y = m\cot^n U \Rightarrow y' = -nmU'(۱ + \cot^۲ U)\cot^{n-۱} U$

مثال ۲۳ - مشتق توابع زیر را بیابید

I) $y = \sin^۵ \sqrt{x}$

II) $y = \sin \sqrt{\cos x}$

III) $y = ۳\sin^۳ \frac{۱}{x}$

IV) $y = \tan x + \sec x$

V) $y =$

جواب :

$$\text{I) } y' = ۵ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\ \sin^{۴}\sqrt{x}$$

$$\text{II) } y' = \frac{-\sin x}{۲\sqrt{\cos x}} \times \cos\sqrt{\cos x}$$

$$\text{III) } y' = ۳\times۳\times\frac{-۱}{x^{۲}}\cos\frac{۱}{x}\sin^{۲}\frac{۱}{x}$$

$$\text{IV) } y' = (۱+\tan^{۲}x) + \tan x \sec x$$

$$\text{V) } y' =$$

توجه : سؤال پنج توسط دانش‌آموز طرح و پاسخ داده شود.

۳۶ - رسم توابع مثلثاتی :

۱) دورهٔ تناوب تابع را با توجه به مطالب گفته شده پیدا می‌کنیم و فاصلهٔ $[a,b]$ را در صورتیکه نداده باشند طوری انتخاب می‌کنیم که b-a برابر دورهٔ تناوب تابع باشد مانند $[0,۲\pi]$ برای رسم تابع sin

۲) حدود فاصلهٔ داده شده را در تابع قرارداده y را بدست می‌آوریم. واضح است که برای هر دو مقدار، y یکسان بدست می‌آید.

۳) اگرتابع‌کسری‌باشد، بامساوی صفر قراردادن مخرج آن مجانب‌های قائم منحنی را پیدامی‌کنیم

۴) در صورت امکان محل برخورد تابع با محورهای مختصات را نیز بدست می‌آوریم

۵) از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرارمی‌دهیم. در صورتی که مشتق دارای جواب باشد جواب‌های موجود را در فاصلهٔ $[a,b]$ را پیدا می‌کنیم. این جواب‌ها، ممکن است طول‌های اکسترمم منحنی باشند.

۶) جواب‌های پیدا شده برای مشتق را در معادلهٔ تابع قرارداده مقادیر y را محاسبه می‌کنیم

۷) جدول تغییرات را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم

x	a	مقادیر x	b
y'		علامت مشتق	
y		مقادیر y	

۸) عدد π را تقریباً معادل ۳ واحد اختیار می‌کنیم.

تذکر: علامت مشتق را با توجه به رفتار y یا گاهی اوقات با تابع مشتق تعیین می‌کنیم.

مثال ۲۴ - جدول تغییرات و نمودار تابع $y=۲\sin^۳x+۳\sin^۲x$ را رسم کنید.

حل: ابتدا دورهٔ تناوب تابع را مشخص می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} T_۱=۲\pi \\ T_۲=\pi \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ک م م } T_۱,T_۲} T=۲\pi$$

پس نمودار $y=۲\sin^۳x+۳\sin^۲x$ را در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} x=۰ \\ x=۲\pi \end{array}\right\} \Rightarrow y=۰$$

$$y=۰\Rightarrow ۲\sin^۳x+۳\sin^۲x=۰\Rightarrow \sin^۲x\,(۲\sin x+۳)=۰$$

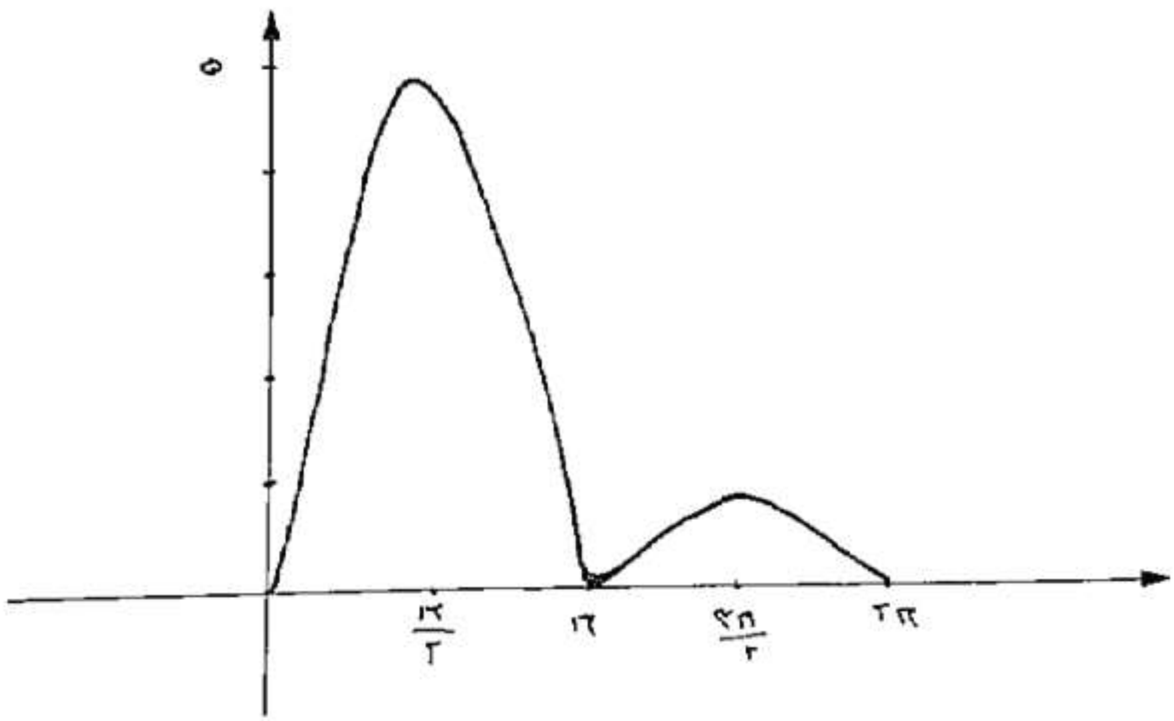
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^۲x=۰\Rightarrow \sin x=۰ \Rightarrow \begin{array}{l} x=۰ \\ x=\pi \\ x=۲\pi \end{array} \\ ۲\sin x+۳=۰\Rightarrow \sin x=\dfrac{-۳}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$y'=۶\cos x\sin^۲x+۶\cos x\sin x \qquad \sin x=۰\rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\pi\Rightarrow y=۰ \\ x=۲\pi \end{cases}$$

$$y'=۶\cos x\sin x(\sin x+۱)\rightarrow y'=۰\Rightarrow \cos x=۰\rightarrow \begin{bmatrix} x=\frac{\pi}{۲}\rightarrow y=۵ \\ x=\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow y=۱ \end{bmatrix}$$

$$\sin x+۱=۰\rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow y=۱$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$		$-$		$+$		$-$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
			max		min		max		



مثال۲۵– جدول تغییرات و نمودار تابع $y = secx + cscx$ را در فاصلهٔ $[0\,,2\pi]$ رسم کنید.

$$y=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\sin x\cos x=0\rightarrow\frac{1}{2}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\Rightarrow\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{\pi}{2}\\x=\pi\\x=\frac{3\pi}{2}\\x=2\pi\end{array}$$

$\xrightarrow{\hspace{3em}}$ مجانب‌های قائم

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0 \Rightarrow \sin^3 x - \cos^3 x = 0$$

$$\Rightarrow \sin^3 x = \cos^3 x \Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow[\cos x]{\text{تقسیم بر}} \tan x = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow[\text{گویا می‌کنیم}]{\text{در معادله قرارداده}} \begin{matrix} y = 2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{matrix}$$

توجه $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$ صفرهای مشتق و احتمالاً اکسترمم‌های تابع هستند.

$$y = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0 \xrightarrow[\text{ناقص}]{\text{معادلهٔ کلاسیک نوع اول}} \tan x + 1 = 0$$

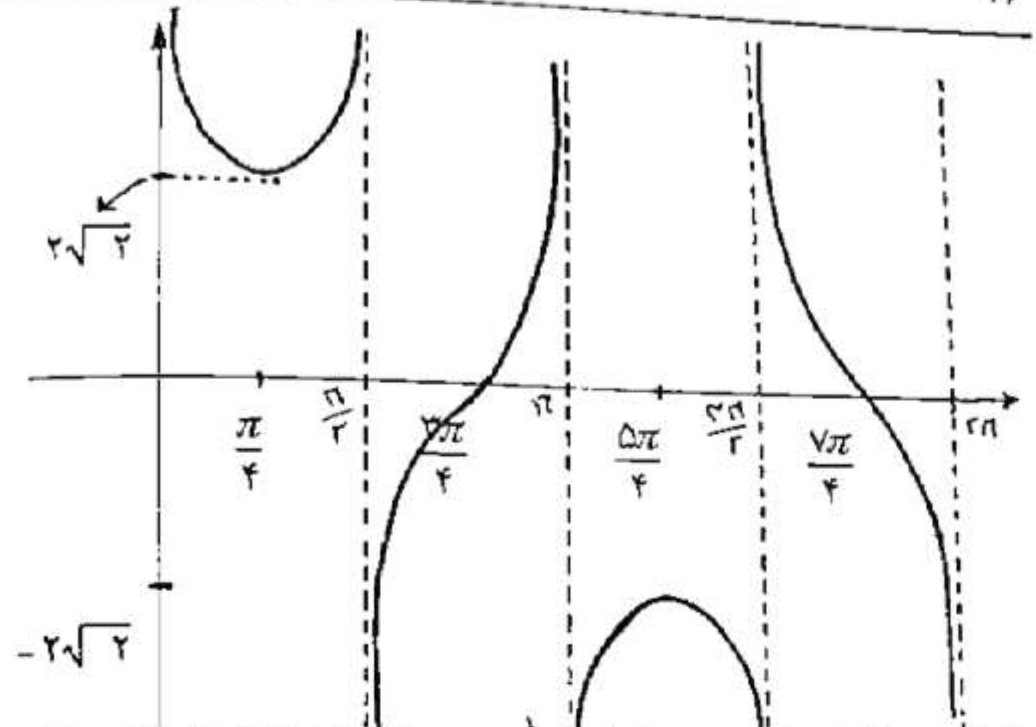
$$\Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$x = \frac{3\pi}{4}$ و $x = \frac{7\pi}{4}$ محل برخورد با محور x ها می‌باشند

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'	‖	$-$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$		$-$	‖
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$ min	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

توجه: برای تعیین رفتار تابع حول مجانب‌ها از حد استفاده می‌کنیم به عنوان مثال در جدول بالا داریم

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$



مثال ۲۶ جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ را در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ رسم کنید.

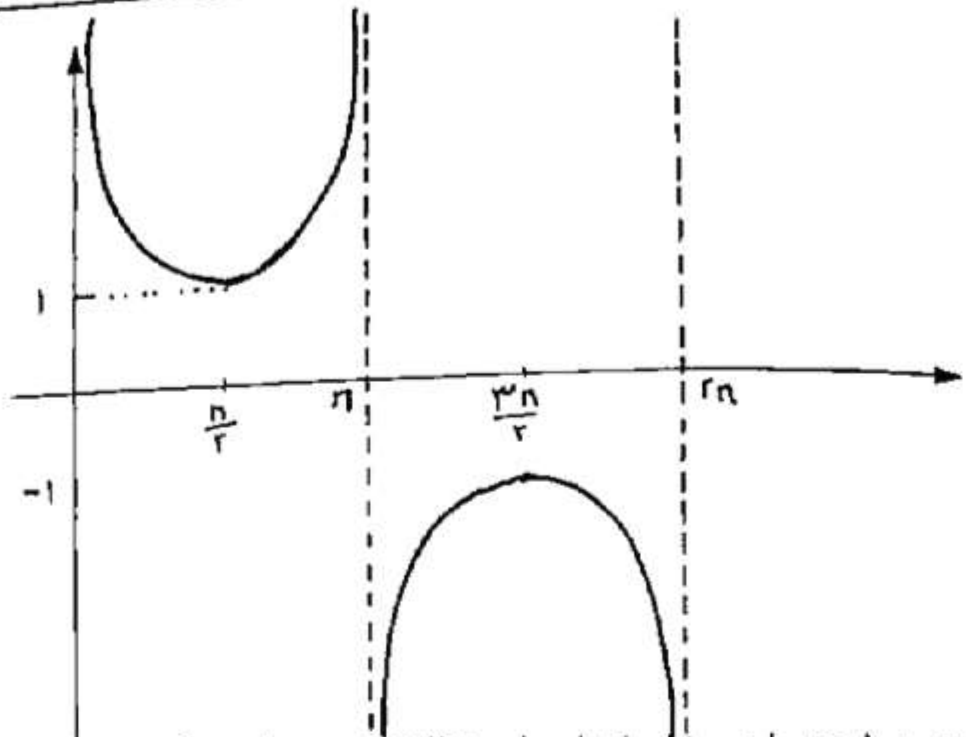
مجانب‌های قائم

$$\sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

$$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 1 \\ x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖
y	$+\infty$	↘	1 min	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1 max	↘	$-\infty$



مثال ۲۷ جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \tan 2x + 1$ را رسم کنید.

حل: دورهٔ تناوب تابع $T = \frac{\pi}{2}$ است پس نمودار آن را در فاصلهٔ $[0, \frac{\pi}{2}]$ رسم می‌کنیم

برای سادگی می‌توان تابع را به صورت $y = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 1$ نوشت

بنابر این تابع کسری است و ممکن است مجانب قائم داشته باشد برای این منظور مخرج آن را

برابر صفر قرارمی‌دهیم

$$\cos 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{4}$$ مجانب‌قائم

نقاط ابتدا و انتهای فاصله را قرارمی‌دهیم

$$y = \tan 2x + 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

$$y=۰ \Rightarrow \tan ۲x+۱=۰ \Rightarrow \tan ۲x=-۱ \Rightarrow \tan ۲x=-\tan\frac{\pi}{۴}$$

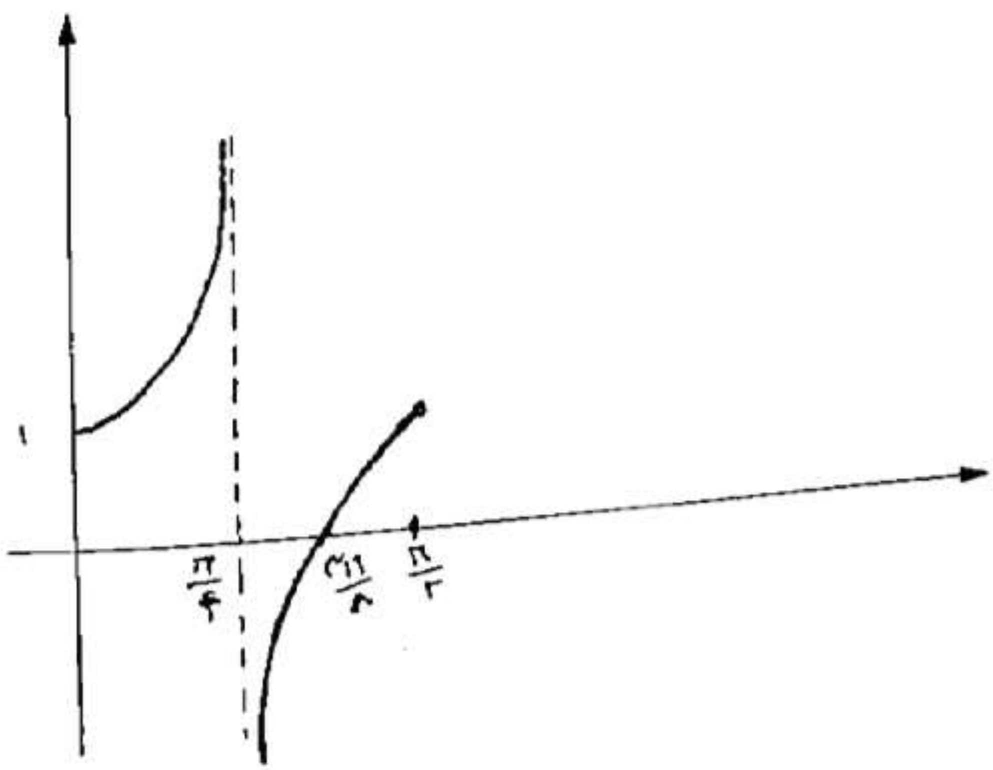
$$\Rightarrow \tan ۲x=\tan\frac{-\pi}{۴} \Rightarrow ۲x=k\pi+\left(\frac{-\pi}{۴}\right)$$

$$۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸} \xrightarrow{k=۱} x=\frac{۳\pi}{۸}$$

$y'=۲(۱+\tan^۲ ۲x)>۰$ تابع صعودی

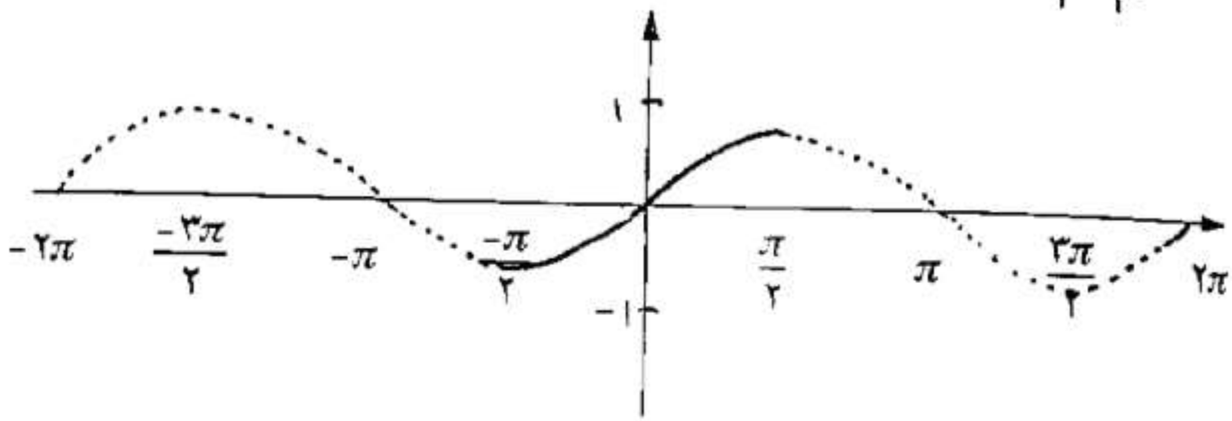
x	۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{۳\pi}{۸}$		$\frac{\pi}{۲}$
y'		$+$	$\Vert$		$+$		
y	۱	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۱

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} f(x)=+\infty$



۳۷ - معکوس توابع مثلثاتی

اگر دامنهٔ این توابع را محدود کنیم یک به یک و معکوس‌پذیر می‌شوند به عنوان مثال تابع $f(x)=\sin x$ یک به یک نبوده بنابر این معکوس‌پذیر نیز نمی‌باشد اما نمودار این تابع در $[\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ یک به یک و لذا معکوس‌پذیر است.

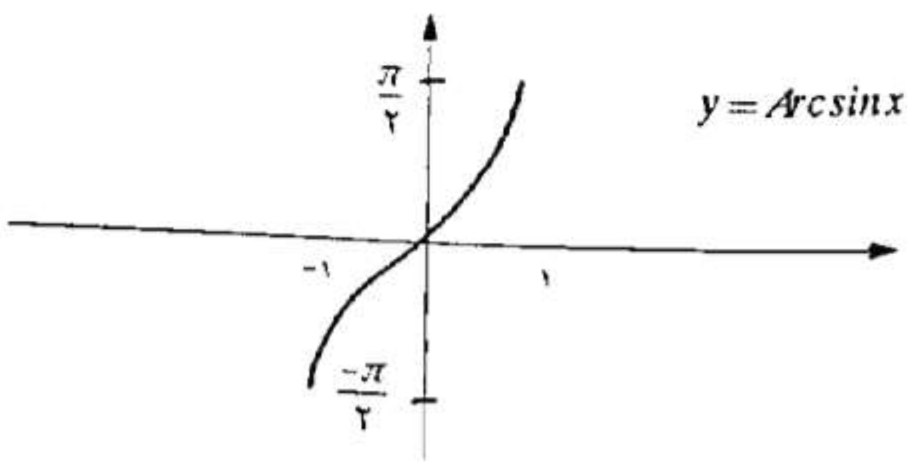


$y=\sin x \qquad D_y=[\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}] \qquad R_y=[-۱,۱]$

اما می‌دانیم جای دامنه و برد در f, f^{-1} عوض می‌شود بنابر این

$y=Arc\sin x \qquad D_y=[-۱,۱] \qquad R_y=[\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$

x	y
-۱	$\frac{-\pi}{۲}$
۰	۰
۱	$\frac{\pi}{۲}$



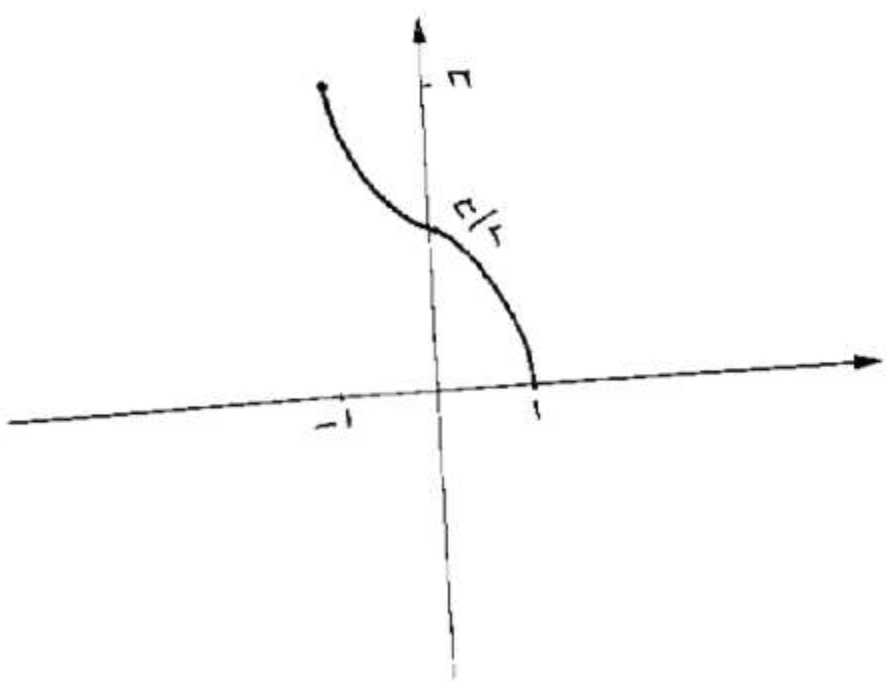
توجه : دو نمودار $y=\sin x$ و $y=Arc\sin x$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

نکته : منظور از $Arc\sin x$ کمانی است که سینوسش برابر x است (این کمان بین $\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ است به عنوان مثال

$$Arc\sin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6} \quad , \quad Arc\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

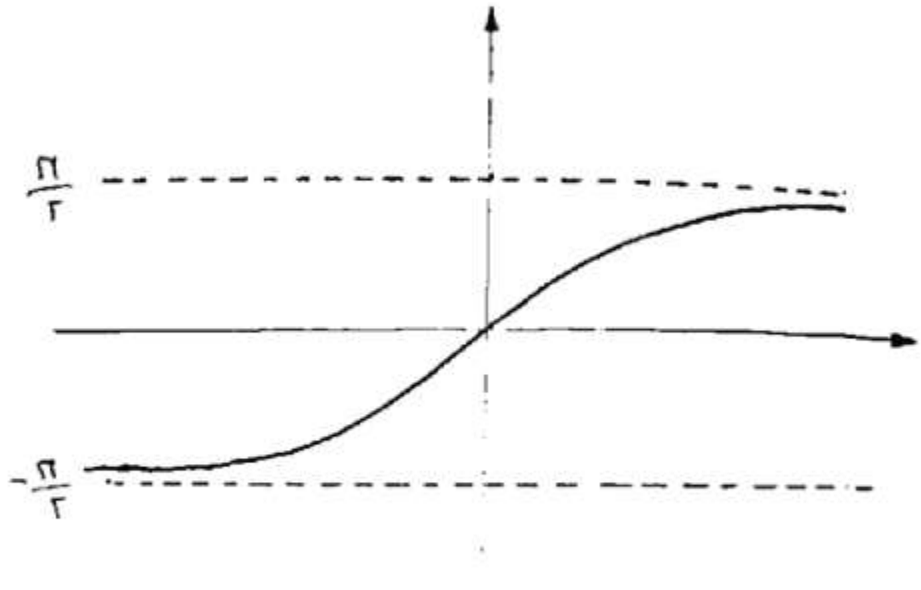
بطور مشابه $R_y=[0,\pi]$ $D_y=[-1,1]$ $y=Arc\cos x$

x	y
-1	π
0	$\frac{\pi}{2}$
1	0



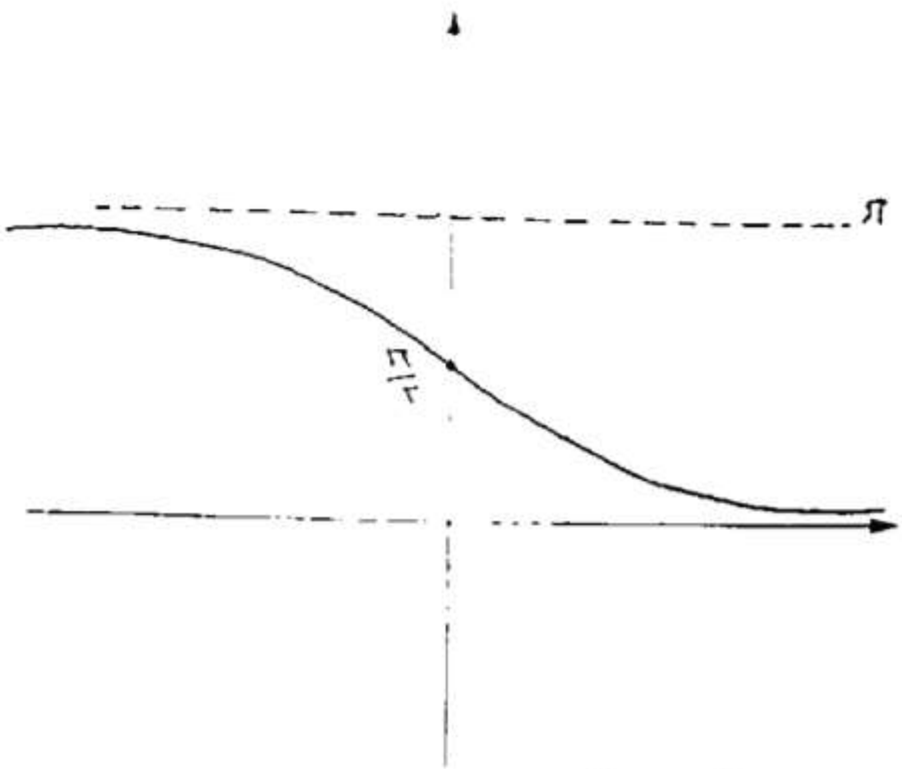
$y = Arc\tan x \qquad D_y = IR \qquad R_y = (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$

x	y
$-\infty$	$\frac{-\pi}{۲}$
۰	۰
∞	$\frac{\pi}{۲}$



$y = Arc\cot x \qquad D_y = IR \qquad R_y = (۰, \pi)$

x	y
$-\infty$	π
۰	$\frac{\pi}{۲}$
∞	۰



۳۸ - قوانین حاکم بر Arc

$۱. \sin(Arc\sin x) = x \qquad -۱ \le x \le ۱$

۲. $\cos(\text{Arccos}\, x) = x$ $\quad -۱ \leq x \leq ۱$

۳. $\tan(\text{Arctan}\, x) = x$ $\quad \forall x \in IR$

۴. $\cot(\text{Arccot}\, x) = x$ $\quad \forall x \in IR$

۵. $\sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{۱ - x^{۲}}$

۶. $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{۱ - x^{۲}}$

۷. $\tan(\text{Arccot}\, x) = \frac{۱}{x}$

۸. $\cot(\text{Arctan}\, x) = \frac{۱}{x}$

۹. $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}\, x$

۱۰. $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}\, x$

۱۱. $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}\, x$

۱۲. $\text{Arccot}(-x) = \pi - \text{Arccot}\, x$

۱۳. $\text{Arcsin} x + \text{Arcsin}(-x) = ۰$

۱۴. $\text{Arctan} x + \text{Arctan}(-x) = ۰$

۱۵. $\text{Arccos} x + \text{Arccos}(-x) = \pi$

۱۶. $\text{Arccot} x + \text{Arccot}(-x) = \pi$

۱۷. $\text{Arcsin} x + \text{Arccos} x = \frac{\pi}{۲}$

۱۸. $\text{Arctan} x + \text{Arccot} x = \frac{\pi}{۲}$

۱۹. $Arcsin(\sin x) = x$ $\qquad \frac{-\pi}{۲} \le x \le \frac{\pi}{۲}$

۲۰. $Arcsin(\sin x) = \pi - x$ $\qquad \frac{\pi}{۲} \le x \le \frac{۳\pi}{۲}$

۲۱. $Arcsin(\sin x) = x - ۲\pi$ $\qquad \frac{۳\pi}{۲} \le x \le ۲\pi$

۲۲. $Arccos(\cos x) = x$ $\qquad ۰ \le x \le \pi$

۲۳. $Arccos(\cos x) = ۲\pi - x$ $\qquad \pi \le x \le ۲\pi$

۲۴. $Arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{۲} - x$ $\qquad ۰ \le x \le \pi$

۲۵. $Arcsin(\cos x) = x - \frac{۳\pi}{۲}$ $\qquad \pi \le x \le ۲\pi$

۲۶. $Arccos(\sin x) = \frac{\pi}{۲} - x$ $\qquad \frac{-\pi}{۲} \le x \le \frac{\pi}{۲}$

۲۷. $Arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{۲}$ $\qquad \frac{\pi}{۲} \le x \le \frac{۳\pi}{۲}$

۲۸. $Arccos(\sin x) = \frac{۵\pi}{۲} - x$ $\qquad \frac{۳\pi}{۲} \le x \le ۲\pi$

۲۹. $Arctan(\cot x) = \frac{\pi}{۲} - x$ $\qquad ۰ < x < \pi$

۳۰. $Arccot(\tan x) = \frac{\pi}{۲} - x$ $\qquad \frac{-\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$

مثال ۲۸ – حاصل عبارت‌های زیر را بیابید

۱) $Arcsin(\sin\frac{\pi}{۶}) = Arcsin(\frac{۱}{۲}) = \frac{\pi}{۶}$ دستور ۱۹ را ببینید

۲) $Arcsin(\sin\frac{۵\pi}{۶}) = Arcsin(\frac{۱}{۲}) = \frac{\pi}{۶}$ یا $\pi - \frac{۵\pi}{۶} = \frac{\pi}{۶}$ دستور ۲۰

۳) $Arccos(\cos\frac{۲\pi}{۳}) = Arccos(-\frac{۱}{۲}) = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$ دستور ۲۲

۴) $Arccos(\cos\frac{۵\pi}{۳}) = Arccos(\frac{۱}{۲}) = \frac{\pi}{۳}$ یا $۲\pi - \frac{۵\pi}{۳}$ دستور ۲۳

۵) $Arccos\left(\sin\frac{11\pi}{6}\right) = Arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ یا $\frac{5\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ دستور ۲۸

۶) $Arcsin\left(\cos\frac{11\pi}{6}\right) = Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ یا $\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$ دستور ۲۵

۷) $Arccot\,20 + Arccot(-20) = \pi$ دستور ۱۶

۸) $Arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \pi - Arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ دستور ۱۰

مثال ۲۹ -

مقدار $2\cot 2\left(Arctan\frac{x}{2}\right)$ کدام است.

۱) x ۲) $2\tan x$ ۳) $2\times\frac{4-x^2}{4x}$ ۴) $2\times\frac{4x}{4-x^2}$

جواب

فرض $Arctan\frac{x}{2} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{x}{2}$

$$\cot 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$

$$2\cot 2\left(Arctan\frac{x}{2}\right) = 2\cot 2\alpha$$

$$= 2\left[\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\right] = 2\left[\frac{1-\frac{x^2}{4}}{2\frac{x}{2}}\right] = 2\left[\frac{4-x^2}{4x}\right]$$

گزینه ۳

۳۹ - مشتق توابع معکوس مثلثاتی :

$$y = Arcsin\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad |u| < 1$$

$$y = Arccos\,u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad |u| < 1$$

$$y = Arctan\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y=Arc\cot u \Rightarrow y'=\frac{-U'}{1+U^2}$$

مثال ۳۰ – مشتق تابع $y=(Arcsin\ 2x)^7$ را بیابید.

$$y'=7\left(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right)(Arcsin\ 2x)^6$$

تمرین : دامنه و برد تابع $y=Arcsecx$ را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

۴۰ – دستورات انتگرال‌گیری در توابع مثلثاتی :

اگر $f(x)$ مشتق تابع $F(x)$ باشد آنگاه $F(x)$ را تابع اولیهٔ $f(x)$ گویند اما چون مشتق تابع $F(x)+c$ (c یک عدد ثابت است) نیز برابر $f(x)$ است بنابر این تابع اولیه $f(x)$ در حالت کلی برابر $F(x)+c$ می‌باشد فرض $f(x)=\cos x$ می‌خواهیم $F(x)$ را پیدا کنیم

اما می‌دانیم توابعی مانند $\sin x$ یا $\sin x+5$ یا $\sin x+\frac{1}{2}$ همگی دارای مشتق یکسان $\cos x$ هستند بنابر این $F(x)=\sin x+c$ می‌باشد ، بنابر این داریم

$$\int \cos x\,dx=\sin x+c \qquad \cong \qquad \int f(x)\,dx=F(x)+c$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+c$$

$$\int (1+\tan^2 x)\,dx=\tan x+c$$

$$\int (1+\cot^2 x)\,dx=-\cot x+c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}Arctan\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=Arc\sin\frac{x}{a}+c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$$

مثال ۳۱ - انتگرال‌های نامعین زیر را بیابید

۱

$$\int \sin 3x\,dx$$

جواب

از طرفین دیفرانسیل‌گیری می‌کنیم $3x = u$

$$3dx = du$$

$$\Rightarrow \; dx = \frac{du}{3}$$

$$\Rightarrow \; \int \sin 3x\,dx = \int \sin u \times \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + c$$ بجای u مقدار $3x$ را قرار می‌دهیم

۲ -

$$\int \tan x\,dx$$

جواب

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \qquad \cos x = u \Rightarrow -\sin x\,dx = du$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{du}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{u} \times -\frac{du}{\sin x} = -\int \frac{du}{u} = -Ln\,|u| = -Ln\,|\cos x| + c$$

تذکر: $\int \frac{dx}{x} = Ln\,|x| + c$

۳ -

این انتگرال را به دو روش می‌توان حل کرد

$$\int \tan^2 x\,dx$$

روش اول $\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \Rightarrow \int \tan^2 dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$

$= \int \sec^2 x dx - \int 1 dx$

فرض $\tan x = u \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = du \Rightarrow \sec^2 x \, dx = du$

$\Rightarrow \int \sec^2 x \, dx - \int 1 dx = \int du - \int dx = u - x = \tan x - x$

$\Rightarrow \int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + c$

روش دوم: به عبارت تحت انتگرال ۱ واحد اضافه و کم می‌کنیم.

$\int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int 1 dx$

بنابر سومین فرمول انتگرال‌گیری ص ۵۵ $= \tan x - x + c$

تمرین: $\int \tan^3 x \, dx$ را یافته و از روی آن دستوری برای $\int \tan^n x \, dx$ بنویسید.

۴- $\int \sin^2 x \, dx$

حل: داریم $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\qquad \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx$

$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} [x + \frac{1}{2} \sin 2x] + c$

داریم $\int 1 dx = x + c$

$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$ $\qquad = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

۵- $\int \cos^4 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int (\frac{1}{2} (1 + \cos 2x))^2 dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

داریم $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right)dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

تمرین به روش بالا $\int \sin^6 x\,dx$ را بیابید.

مثال ۳۲ – مقدار انتگرال نامعین مقابل را حساب کنید. $\int \sec^6 x\,dx$

$$\int \sec^6 x\,dx = \int \sec^4 x \times \sec^2 x\,dx$$

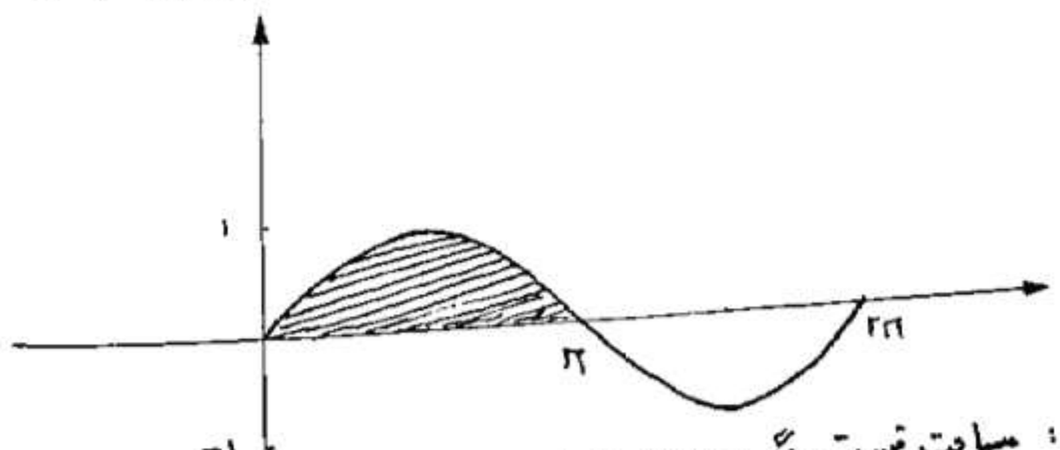
$$= \int (1 + \tan^2 x)^2 \times \sec^2 x\,dx$$

فرض $\tan x = u \Rightarrow \int (1 + u^2)^2\,du = \int (1 + 2u^2 + u^4)\,du$

$(1 + \tan^2 x)\,dx = du$ $\qquad = u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$

$\sec^2 x\,dx = du$ $\qquad = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$

مثال ۳۳ – با توجه به نمودار تابع $f(x) = \sin x$ مساحت قسمت رنگی را بیابید **(کاربرد انتگرال)**



جواب : **مساحت قسمت رنگی عبارت است از:** $S = \left| \int_0^\pi \sin x\,dx \right|$

ابتدا $\int_0^\pi \sin x\,dx$ را پیدا می‌کنیم سپس از آن قدر مطلق می‌گیریم

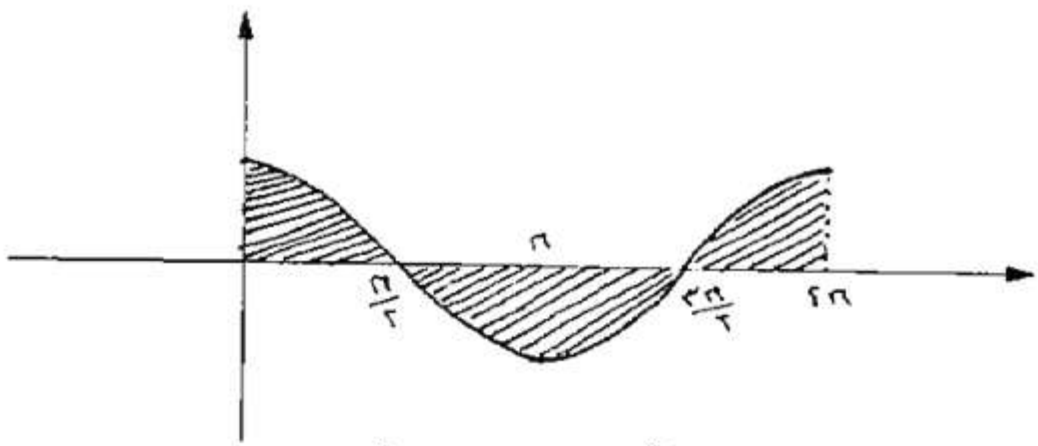
$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

$\Rightarrow S = |۲| = ۲$

توجه: $\int_a^b f(x)\,dx$ راکه عدد معینی است، انتگرال معین $f(x)$ و a و b را حدود انتگرال‌گیری می‌نامند. و برای پیدا کردن $\int_a^b f(x)\,dx$ کافی است ابتدا $F(x)$ (تابع اولیه f) را پیدا کنید و عدد c را کنار گذاشته و سپس در $F(x)$ بجای x ابتدا b و بعد از آن a را قرارداده و در پایان $F(b) - F(a)$ را حساب کنید. یعنی

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

مثال۳۴ - مساحت محصور به تابع $f(x) = \cos x$ و محور xها را در فاصله $[۰ , ۲\pi]$ را بیابید.



$$S = \left| \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos x\,dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} \cos x\,dx \right| + \left| \int_{\frac{۳\pi}{۲}}^{۲\pi} \cos x\,dx \right|$$

البته(انتگرال‌های اولی و سومی) نیازی به قدر مطلق ندارند چون در $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}$ و $\int_{\frac{۳\pi}{۲}}^{۲\pi}$ مساحت روی محور xها و مثبت است.

$$S = \sin x\Big]_۰^{\frac{\pi}{۲}} + \sin x\Big]_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}} + \sin x\Big]_{\frac{۳\pi}{۲}}^{۲\pi}$$

$$= \left| \sin\frac{\pi}{۲} - ۰ \right| + \left| \sin\frac{۳\pi}{۲} - \sin\frac{\pi}{۲} \right| + \left| \sin ۲\pi - \sin\frac{۳\pi}{۲} \right|$$

$$= |۱ - ۰| + |-۱ - ۱| + |۰ - (-۱)| = ۱ + ۲ + ۱ = ۴$$

تست‌های مثلثات (آزمون پایانی)

۱) اگر $A+B=\frac{\pi}{۴}$ در اینصورت $\cos B - \sin B$ کدام است.

۱) $\sqrt{۲}\tan A$ ۲) $\sqrt{۲}\sin A$ ۳) $\sqrt{۲}\cos A$ ۴) $\sqrt{۲}\cot A$

۲) عبارت $\sin^{۲}(a-b)+\cos^{۲}(b-a)$ برابر است با

۱) $\sin a$ ۲) $\cos a \sin b$ ۳) $\sin a \cos b$ ۴) هیچکدام

۳) اگر $\sin x=\frac{\alpha}{\beta}$ آنگاه $\cos ۲x + ۲\sin^{۲}x$ کدام است.

۱) $\frac{\beta}{\alpha}$ ۲) ۱ ۳) $۱+\frac{\alpha}{\beta}$ ۴) $۱+\frac{\beta}{\alpha}$

۴) اگر $x+y=۴\pi$ آنگاه

۱) $\sin x=\sin y$ ۲) $\tan x=\tan y$ ۳) $\cos x=\cos y$ ۴) هیچکدام

۵) اگر $\sin x-\cos x=\frac{۱}{۲}$ باشد $\sin ۲x$ کدام است.

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۶) $\sin^{۴}\frac{\pi}{۸}-\cos^{۴}\frac{\pi}{۸}$ برابر است با

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷) $\sin ۸۰^\circ - \sin ۴۰^\circ$ کدام است

۱) $\sin ۲۰^\circ$ ۲) $۲\sin ۱۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ$ ۳) $\sin ۴۰^\circ$ ۴) $۲\sin ۶۰^\circ\cos ۲۰^\circ$

۸) حاصل عبارت $\tan ۲۰^\circ\tan ۴۰^\circ\tan ۸۰^\circ$ کدام است

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) هیچکدام

۹) ریشه‌های معادله $4Arctan(x^2 - 3x + 3) - \pi = 0$ کدامند

۱) ۲ و ۱- ۲) ۲ و ۱ ۳) ۲- و ۱ ۴) ۲- و ۱-

۱۰) مساحت سطح محصور به منحنی $f(x) = \frac{tan\,x}{cos\,x}$ در فاصلهٔ $[0, \frac{\pi}{3}]$ کدام است.

۱) $2\sqrt{2} - 1$ ۲) $2\sqrt{2} - 2$ ۳) $\sqrt{2} - 1$ ۴) هیچکدام

۱۱) حاصل $sin\,[Arcsin\,x + Arccos\,x]$ کدام است

۱) 1 ۲) 0 ۳) ∞ ۴) -1

۱۲) اگر $tan\,x + cot\,x = k + 1$ آنگاه k در کدام فاصله می‌تواند صدق کند.

۱) $[1, 3]$ ۲) $[-4, -3]$ ۳) موارد ۱ و ۲ ۴) هیچکدام

۱۳) معادله $cos^4\alpha - sin^4\alpha = \frac{1}{2}$ در فاصلهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴) معادله $sin\,x + sin\,3x = sin\,2x$ در فاصلهٔ $[0, \frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵) دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{2}\,sin\,(4 - 3x)$ کدام است.

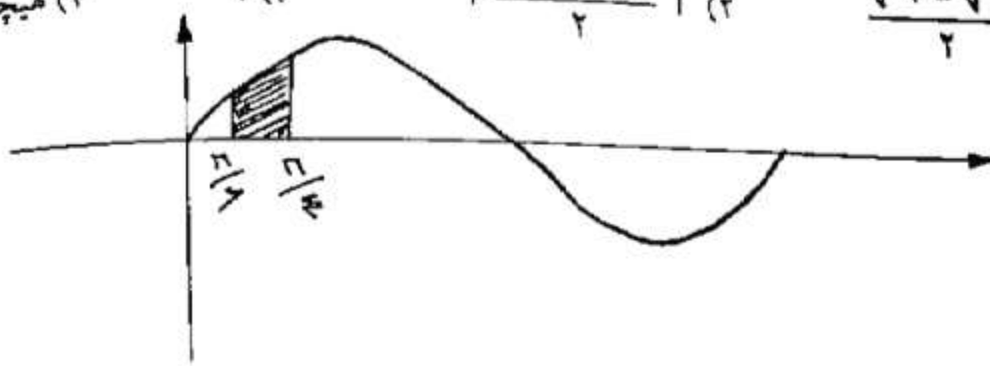
۱) $[-1, 1]$ ۲) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ۳) $[1, \frac{5}{3}]$ ۴) هیچکدام

۱۶) اگر $log_2^{sin\,10^\circ} = a$ مقدار $log_2 \frac{sin\,20 + sin\,40}{sin\,20}$ کدام است

۱) $1 + a$ ۲) $-1 - a$ ۳) $-1 + a$ ۴) $1 - a$

۱۷) اگر نمودار $y = sin\,x$ به صورت مقابل باشد مساحت قسمت رنگی کدام است

۱) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right|$ ۳) ۱ ۴) هیچکدام



۱۸) MAX مقدار تابع $f(x) = 2\sin x+5$ کدام است

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۹) مقادیر $\cos x$ در فاصله $[0 , \frac{\pi}{2}]$

۱) صعودی ۲) گاهی صعودی گاهی نزولی ۳) نزولی ۴) قابل پیش‌بینی نیست

۲۰) ۴۰ گراد معادل کدام است

۱) $\frac{\pi}{7}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) 50° ۴) 36°

۲۱) حاصل عبارت $\cos 10^\circ - \cos 50^\circ$ کدام است

۱) $-\sin 20$ ۲) $-\cos 20$ ۳) $\sin 20$ ۴) $\cos 20$

۲۲) حاصل عبارت $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1+\sin x \cos x}$ کدام است

۱) $\sin x+\cos x$ ۲) $\cos x - \sin x$ ۳) $1-\sin x$ ۴) $1-\cos x$

۲۳) مقدار $\cos 140 + \cos 100 + \cos 20$ برابر است با

۱) $2\cos 20$ ۲) $\cos 10$ ۳) $2\cos 40$ ۴) ۰

۲۴) معادله $\sin x + (m-1)\cos x = m$ به ازاء کدام مقدار m جواب دارد

۱) $m>1$ ۲) $m\geq 2$ ۳) $m\geq 3$ ۴) $m\leq 1$

۲۵) حاصل $\frac{1-\tan 18}{1+\tan 18}$ کدام است.

۱) $\tan 23$ ۲) $\tan 27$ ۳) $\tan 37$ ۴) هیچکدام

۲۶) مشتق تابع $f(x)=\cos x^2$ در نقطهٔ $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ کدام است.

۱) $-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۲) $2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۳) $\frac{-\pi}{2}$ ۴) هیچکدام

۲۷) دورهٔ تناوب تابع $y=\sin\frac{2x}{3}+\cos x$ کدام است

۱) 2π ۲) π ۳) 6π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۸) دورهٔ تناوب تابع $y=\tan\frac{1}{x}$ کدام است.

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) هیچکدام

۲۹) مساحت سطح محصور بین منحنی $y=\cos^2 x$ و محور xها در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ کدام است.

۱) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۰) تابع اولیه تابع $f(x)=\tan^2 x-\frac{3}{\sin^2 x}$ کدام است.

۱) $\tan x-x+3\cot x+c$ ۲) $\tan x+x-3\cot x+c$

۳) $\tan x+x+3\cot x+c$ ۴) $\tan x-x-3\cot x+c$

۳۱) حاصل کسر $\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}$ کدام است .

۱) $\sin x$ ۲) $\tan x$ ۳) $\cot x$ ۴) $\cos x$

۳۲) حاصل $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ کدام است.

۱) $\frac{۱}{۸}$　　۲) $-\frac{۱}{۸}$　　۳) ۱　　۴) ۱-

۳۳) معادله‌ی $\frac{\sin^۴ x - \cos^۴ x}{\sin ۲x} = \sqrt{۳}$ در $[۰ , ۲\pi]$ چند جواب دارد.

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۱

۳۴) به ازای چه مقدار k عبارت $\sin^۶ x + \cos^۶ x + k(\sin^۴ x + \cos^۴ x)$ مستقل از x است.

۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $-\frac{۲}{۳}$　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $-\frac{۳}{۲}$

۳۵) هرگاه $f'(x) = \tan\sqrt{x}$ باشد مشتق تابع $f(\sqrt{x})$ کدام است.

۱) $۱ + \sqrt[۴]{x}\tan x$　　۲) $\frac{\tan\sqrt[۴]{x}}{۲\sqrt{x}}$　　۳) $\tan\sqrt[۴]{x}$　　۴) هیچکدام

۳۶) در مثلث $A\hat{B}C$ اگر $a = ۱۴$ و $b = ۱۰$ و $c = ۱۶$ آنگاه $\sin B$ کدام است.

۱) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۴}$　　۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۴}$　　۳) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۱۵}$　　۴) هیچکدام

۳۷) مقدار $\frac{\tan ۷۶^\circ - \tan ۱۶^\circ}{۱ + \tan ۷۶^\circ \tan ۱۶^\circ}$ کدام است.

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$　　۲) $\sqrt{۳}$　　۳) ۰　　۴) هیچکدام

۳۸) اگر $\frac{۳\pi}{۴} < x < \pi$ و $\sin x \cos x = -\frac{۱}{۴}$ باشد مقدار $\sin x + \cos x$ کدام است

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $-\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳۹) مجموع جواب‌های حاده معادله $\tan ۴x - \cot x = ۰$ چند درجه است.

۱) 36° ۲) 72° ۳) 45° ۴) 63°

۴۰) اگر $x-y=\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3}$ آنگاه $\cot\frac{x+y}{2}$ کدام است.

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $-\sqrt{3}$

۴۱) معادله $\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x=0$ در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد.

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) هیچکدام

۴۲) اگر $\sin^2 x+4\sin x\cos x+5\cos^2 x=3$ باشد مقدار $\tan 2x$ کدام است.

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) -1 ۴) 1

۴۳) اگر $f(x)=(Arc\tan x)^2$ آنگاه $f'(-1)$ کدام است.

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) 0

۴۴) اگر $\tan x=i+j$ و $\tan x-\cot x=2j$ آنگاه i^2-j^2 کدام است.

۱) 1 ۲) 4 ۳) -1 ۴) هیچکدام

۴۵) حاصل عبارت $\frac{3\cos 15^\circ-4\cos^3 15^\circ}{3\sin 15^\circ-4\sin^3 15^\circ}$ کدام است

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) هیچکدام

۴۶) حاصل عبارت $\frac{\cos 4x\cos x+\sin x\sin 4x}{\cos x}$ کدام است.

۱) $2\cos 2x - 1$ ۲) $2\sin 2x - 1$ ۳) $2\cos 2x + 1$ ۴) هیچکدام

۴۷) اگر $\int_0^{k\pi} \sin\frac{x}{k}dx = 6$ باشد مقدار k کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸) مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{14}} 2\sin 5x \cos 2x\, dx$ کدام است

۱) $\frac{10}{21} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{14}$ ۲) $-\frac{10}{21} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{14}$ ۳) $\frac{\pi}{14} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{14} -$ ۴) هیچکدام

۴۹) مقدار $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$ کدام است

۱) $\frac{\pi}{2} + 1$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2} - 1$ ۴) هیچکدام

۵۰) مقدار $\int_0^{\pi} [\sin x]dx$ کدام است

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) π ۴) هیچکدام

موفق باشید . مرتضی قاسمی

□	□	■	□	۱
■	□	□	□	۲
□	□	■	□	۳
□	■	□	□	۴
□	□	■	□	۵
□	□	■	□	۶
□	□	□	■	۷
□	□	□	■	۸
□	□	■	□	۹
□	□	■	□	۱۰
□	□	□	■	۱۱
□	■	□	□	۱۲
□	□	■	□	۱۳
□	■	□	□	۱۴
■	□	□	□	۱۵
□	□	■	□	۱۶
□	□	□	■	۱۷
□	■	□	□	۱۸
□	■	□	□	۱۹
■	□	□	□	۲۰
□	■	□	□	۲۱
□	□	■	□	۲۲
■	□	□	□	۲۳
■	□	□	□	۲۴
□	□	■	□	۲۵
□	□	□	■	۲۶
□	■	□	□	۲۷
■	□	□	□	۲۸
■	□	□	□	۲۹
□	□	□	■	۳۰

□	□	■	□	۳۱
□	□	■	□	۳۲
□	□	□	■	۳۳
■	□	□	□	۳۴
□	□	■	□	۳۵
□	□	□	■	۳۶
□	□	■	□	۳۷
■	□	□	□	۳۸
□	□	■	□	۳۹
□	□	□	■	۴۰
□	□	■	□	۴۱
□	■	□	□	۴۲
□	□	□	■	۴۳
□	□	□	■	۴۴
□	■	□	□	۴۵
□	□	□	■	۴۶
□	■	□	□	۴۷
■	□	□	□	۴۸
□	□	■	□	۴۹
□	□	□	■	۵۰

پاسخ تشریحی تست‌های فرد

۱) گزینه ۲

$$A+B=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow B=(\frac{\pi}{۴}-A)$$

$$\cos B=\cos(\frac{\pi}{۴}-A)=\cos\frac{\pi}{۴}\cos A+\sin\frac{\pi}{۴}\sin A$$

$$\Rightarrow \cos B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos A+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin A \qquad \text{I}$$

$$\sin B=\sin(\frac{\pi}{۴}-A)=\sin\frac{\pi}{۴}\cos A-\cos\frac{\pi}{۴}\sin A$$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos A-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin A \qquad \text{II}$$

با توجه به روابط I و II داریم

$$\cos B-\sin B=\sqrt{۲}\sin A$$

روش تستی : با توجه به رابطه ۱۱ از بند ۲۴

$$B-\frac{\pi}{۴}=-A$$

$$\cos B-\sin B=-\sqrt{۲}\sin(B-\frac{\pi}{۴})$$

$$=-\sqrt{۲}\sin(-A)=\sqrt{۲}\sin A$$

۳) گزینه ۲ داریم $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$

$$\cos ۲x+۲\sin^۲ x$$

$$\cos^۲ x-\sin^۲ x+۲\sin^۲ x=\cos^۲ x+\sin^۲ x=۱$$

۵) گزینه ۲

$$\sin x-\cos x=\frac{۱}{۲}$$

$$(\sin x-\cos x)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sin^۲ x-۲\sin x\cos x+\cos^۲ x=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱-۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۱-\sin ۲x=\frac{۱}{۴}=,\ \sin ۲x=\frac{۳}{۴}$$

۷) گزینه ۱ با توجه به رابطه ۲ از بند ۱۹

۹) گزینه ۲

$$۴\operatorname{Arctan}(x^۲-۳x+۳)=\pi$$

$$Arctan(x^۲-۳x+۳)=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x^۲-۳x+۳=tan\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x+۳=۱$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x+۲=\circ\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases}$$

۱۱) گزینه ۱ بنابر رابطهٔ ۱۷ از بند ۳۸

$$Arcsin x+Arccos x=\frac{\pi}{۲}$$

$$sin[\frac{\pi}{۲}]=۱$$

۱۳) گزینه ۲ (با استفاده از اتحاد مزدوج داریم)

$$cos^۴\alpha-sin^۴\alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$(cos^۲\alpha-sin^۲\alpha)(cos^۲\alpha+sin^۲\alpha)=\frac{۱}{۲}$$

$$cos^۲\alpha-sin^۲\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow cos۲\alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow cos۲\alpha=cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}۲\alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\rightarrow\alpha=k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ ۲\alpha=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\rightarrow\alpha=k\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

روش تستی (استفاده از رابطه ۸ از بند ۲۴)

K	α
۰	$\frac{\pi}{۶}$
۱	$\frac{۵\pi}{۶}$

۱۵) گزینه ۴ $Df=IR$

۱۷) گزینه ۱ $S = \left| \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left| = \right| -\cos\frac{\pi}{4} - \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) \Big|$

$$= \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

۱۹) گزینه ۳ با توجه به دایره مثلثاتی یا نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در فاصلهٔ $[0, \frac{\pi}{2}]$

۲۱) گزینه ۳ شبیه مثال ۹ می‌باشد

۲۳) گزینه ۴

$$\cos 20 + \cos 100 + \cos 140 = 2\cos\frac{140+100}{2} \cos\frac{140-100}{2} + \cos 20$$

داریم $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$$2\cos 120 \quad \cos 20 + \cos 20$$

$$-\cos 20 + \cos 20 = 0$$

۲۵) گزینه ۲

$$\frac{1-\tan 18}{1+\tan 18} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 18\right) = \tan(45-18) = \tan 27^\circ$$

۲۷) گزینه ۳

$$y = \sin\frac{2x}{3} + \cos x$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$$

$$\Rightarrow T = 6\pi$$

$$T_2 = 2\pi$$

۲۹) گزینه ۴

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$S=|F(\frac{\pi}{2})-F(0)|=\frac{\pi}{4}$$

۳۱ – گزینه ۲

$$\frac{\sin x+2\sin x\cos x}{\cos x+2\cos^2 x}\xrightarrow[\text{از } \cos x \text{ فاکتور}]{\text{از } \sin x \text{ فاکتور}}\frac{\sin x(1+2\cos x)}{\cos x(1+2\cos x)}=\tan x$$

۳۳ – بنابر رابطه ۸ از بند ۲۴ داریم

$$\frac{-\cos 2x}{\sin 2x}=\sqrt{3}\rightarrow \cot 2x=-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot 2x=-\cot\frac{\pi}{6}\Rightarrow \cot 2x=\cot(\pi-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \cot 2x=\cot\frac{5\pi}{6}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$$

بنابر این ۴ جواب دارد یعنی گزینه ۱

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}$

۳۵ – گزینه ۲

$$(f\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times f'(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{\sqrt{x}}=\frac{\tan\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x}}$$

۳۷ – بنابر بند ۱۸ تانژانت تفاضل دو کمان ۷۶ و ۱۶ است.

$$\frac{\tan 76^\circ-\tan 16^\circ}{1+\tan 76^\circ\tan 16^\circ}=\tan(76-16)=\tan 60=\sqrt{3}$$

۳۹ – گزینه ۲

$$\tan 4x=\cot x\Rightarrow \tan 4x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$$

k	۰	۱
x	$\frac{\pi}{۱۰}$	$\frac{۳\pi}{۱۰}$

$$\Rightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۵x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰}$$

$$\frac{\pi}{۱۰} + \frac{۳\pi}{۱۰} = \frac{۴\pi}{۱۰} = ۷۲^\circ$$

۴۱ - گزینه ۲ داریم

$$cos^۲x - sin^۲x = cos ۲x$$

$$۲sinx\, cosx = sin ۲x$$

$$cos ۲x - \sqrt{۳} sin ۲x = ۰ \quad \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } cos ۲x}$$

$$۱ - \sqrt{۳} tan ۲x = ۰$$

$$\sqrt{۳} tan ۲x = ۱ \Rightarrow tan ۲x = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow tan ۲x = tan \frac{\pi}{۶} \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} x = \frac{\pi}{۱۲}$$

۴۳ - گزینه ۱ $f'(x) = ۲\frac{۱}{۱+x^۲}(Arctanx)' \Rightarrow f'(-۱) = \frac{۲}{۱+۱} Arctan(-۱) = -\frac{\pi}{۴}$

۴۵ - بنابر بند ۲۲ صورت برابر $-cos ۴۵^\circ$ و مخرج $sin ۴۵^\circ$ می‌باشد پس داریم

$$-\frac{cos ۴۵^\circ}{sin ۴۵^\circ} = -cot ۴۵^\circ = -۱$$

۴۷ - گزینه ۳

$$\frac{x}{k} = u \Rightarrow \frac{۱}{k}dx = du \Rightarrow \int_۰^{k\pi} sinu\, kdu$$

$$= k\int_۰^{k\pi} sinu\, du = -kcosu = -kcos\frac{x}{k}\Big]_۰^{k\pi} = k + k \Rightarrow k = ۳$$

۴۹ - گزینه ۲

$$\int_۰^{\pi} sin^۲x dx = \int_۰^{\pi} (\frac{۱-cos ۲x}{۲}) dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}sin ۲x\Big]_۰^{\pi} = \frac{\pi}{۲}$$